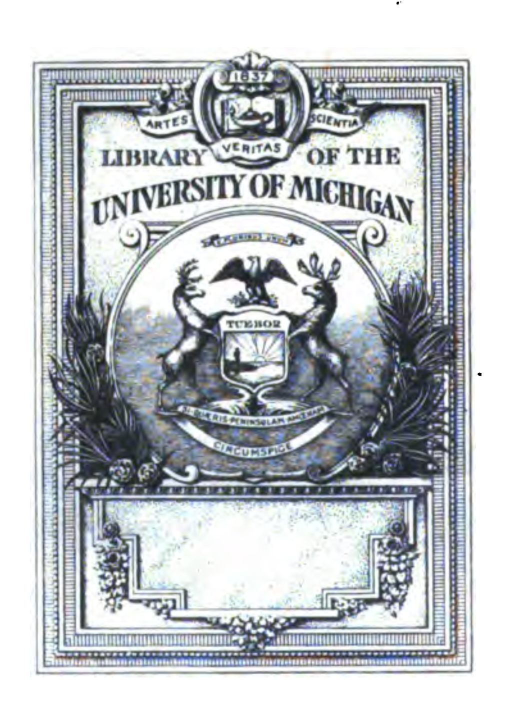
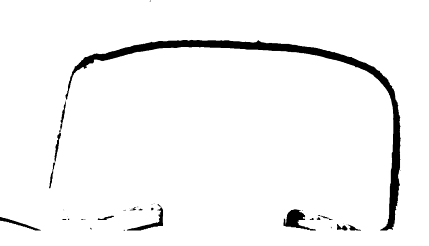

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



PRINCIPES D'HYDRAULIQUE ET DE PYRODYNAMIQUE.

TOME PREMIER.

Ce premier volume et le second traitent du mouvement uniforme et varié de l'eau dans les rivieres, les canaux et les tuyaux de conduite; — de l'origine des fleuves, et de l'établissement de leurs lits; — de l'effet des écluses, des ponts et des reversoirs; — des jets d'eau; — de la navigation tant sur les rivieres que dans des canaux étroits; — de la résistance des fluides en général, et de celle de l'air et de l'eau en particulier.

Le troisieme et dernier volume traite du feu et de l'action qu'il exerce sur les éléments des substances qui passent par les trois états successifs de dureté, de liquidité, et de vaporisation; — de l'air en particulier; de sa densité, de son poids, et de son volume; — de la mesure du calorique qui agit sur l'air; — de l'atmosphere et de ses modifications; — de la mesure du calorique agissant sur l'eau, l'éther, l'alkool et le mercure; — des affinités différentes de ces substances; — de la théorie et de la meilleure construction du barometre et des thermometres; — enfin, de la maniere de mouvoir les fluides par les forces centrales.

Du Buat, Pierre Louis Georges, comte

PRINCIPES D'HYDRAULIQUE ET DE PYRODYNAMIQUE,

VÉRIFIÉS

PAR UN GRAND NOMBRE D'EXPÉRIENCES

FAITES PAR ORDRE DU GOUVERNEMENT;

OUVRAGE EN TROIS VOLUMES.

PAR M. DUBUAT,

Correspondant de l'Institut, ancien Chevalier de l'Ordre de Saint-Jean de Jérusalem, et ci-devant Colonel au Corps royal du Génie.

Ut tandem philosophia et scientiæ solidis experientiæ nitantur fundamentis.

BACON.

NOUVELLE ÉDITION,

REVUE ET CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE.

TOME PREMIER.

Gilbert — Jer 1863

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, IMPRIMEUR DU ROI, DE L'INSTITUT, DE LA MARINE, ET LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES, RUE JACOB, N° 24.

M. DCCC. XVI.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE (1).

Le principe de toutes les connaissances est dans l'entendement humain ; et l'esprit de l'homme, en qualité d'être actif, développe ce germe précieux, et en dirige l'énergie vers les objets qui flattent ses desirs, ou qui peuvent satisfaire ses besoins. Nous raisonnons toujours *juste*, quand nous n'appliquons à un sujet que *les idées qui sont puisées dans la nature* de la chose ; mais on donne au contraire dans toutes sortes d'erreurs, quand on se préoccupe, en voulant conclure avant de raisonner, raisonner avant de connaître, et connaître avant d'avoir examiné. Plus l'objet de nos recherches est simple en lui-même, plus notre esprit en saisit aisément les rapports, et s'éleve, d'une vérité à une autre, jusqu'à celles qui paraissent les plus abstraites : aussi avons-nous fait de grands progrès dans la géométrie et

(1) C'est celui de l'édition de 1786.

dans les autres sciences purement intellectuelles, parce qu'elles sont fondées sur des hypotheses simples, et qu'on n'y considere que les propriétés de l'étendue abstraite ; mais quand l'objet est matériel, et que, ne connaissant ni la grosseur ni la forme de ses parties élémentaires, ni les lois que l'Auteur de la nature leur a imposées, nous voulons néanmoins prévoir les effets, calculer les efforts, diriger l'action ; la nature alors se montre indépendante à notre égard, et, toujours fidele à la loi qui lui est prescrite, et que nous ignorons, elle contrarie nos vues, déconcerte nos projets, rend inutiles nos efforts.

Vouloir connaître à fond la nature des élémens est une prétention vaine, parce que nos organes sont trop grossiers pour cela : supposer des masses et des formes à son gré, c'est faire un système qui ne peut servir de fondement à aucune science ; mais interroger la nature, étudier les lois qu'elle s'est prescrites, la prendre sur le fait, lui dérober son secret, c'est le seul moyen de la maîtriser, et la vraie marche de tout esprit raisonnable.

Ainsi quand Képler eut découvert la loi de la révolution des planetes, Galilée celle de la pesanteur, Pascal celle du poids de l'atmosphere, Newton celle de l'attraction et des routes

de la lumiere, on vit naître de ces découvertes l'astronomie, la chimie, la physique, la ballistique, la mécanique, et l'optique; et toutes les fois que l'homme a pu développer une loi de la nature, inconnue jusque-là, il a toujours posé la base d'une science nouvelle, qui nous a appris à appliquer à notre usage des êtres auparavant rebelles, et à soumettre à nos volontés les éléments les plus indépendants. S'il reste au contraire plusieurs effets naturels, dont la marche nous paraît bizarre, et dont le résultat se dérobe à nos calculs, c'est que nous ignorons le principe général dont ils dépendent, la regle qui les gouverne, le ressort secret qui les produit.

Tels sont en général plusieurs phénomenes que les fluides nous présentent; et tel est en particulier le mouvement de l'eau dans un lit quelconque. On sait que jusqu'à-présent nos connaissances en hydraulique sont extrêmement bornées; car, quoique de grands génies s'y soient appliqués en différents temps, nous sommes encore, depuis tant de siecles, dans une ignorance presque absolue des vraies lois auxquelles le mouvement de l'eau est assujetti: à peine, depuis cent cinquante ans, a-t-on découvert, à l'aide de l'expérience, quelle est la durée, la quantité et la vîtesse de l'écoulement

de l'eau par un orifice quelconque. Tout ce qui concerne le cours uniforme des eaux qui arrosent la surface de la terre, nous est inconu; et pour se faire une idée du peu que nous savons, il suffit de jeter un coup-d'œil sur ce que nous ignorons. Faut-il apprécier la vîtesse d'un fleuve dont on connaît la largeur, la profondeur et la pente; déterminer à quelle hauteur il élevera ses eaux, s'il vient à recevoir un autre fleuve dans son lit; prévoir de combien il baissera si on lui fait une saignée; fixer la pente qui convient à un aquéduc, pour conserver à ses eaux une vîtesse donnée, ou la capacité du lit qui lui convient pour amener dans une ville, avec une pente donnée, une quantité d'eau qui suffise à ses besoins; tracer les contours d'une riviere, de telle sorte qu'elle ne travaille point à changer le lit dans lequel on l'a renfermée; prévoir l'effet d'un redressement, d'une coupure, d'un reversoir; calculer la dépense d'un tuyau de conduite, dont la longueur, le diametre et la charge sont donnés; déterminer de combien un pont, une retenue, une vanne feront hausser les eaux d'une riviere; marquer jusqu'à quelle distance ce remou sera sensible, et prévoir si le pays n'en deviendra pas sujet aux inondations; calculer la longueur et les dimensions d'un canal

destiné à dessécher des marais perdus depuis long-temps pour l'agriculture ; assigner la forme la plus convenable aux entrées des canaux, aux confluents ou aux embouchures des rivieres ; déterminer la figure la plus avantageuse à donner aux vaisseaux ou aux bateaux, pour fendre l'eau avec le moindre effort ; calculer en particulier la force nécessaire pour mouvoir un corps qui flotte sur l'eau ; toutes ces questions, et une infinité d'autres du même genre sont encore insolubles : le croirait-on ? on ignore presque encore à quoi est égal le choc de l'eau, quand elle frappe directement un plan ; à plus forte raison quand elle se meut contre des surfaces convexes de toute espece.

Tout le monde raisonne sur l'hydraulique ; mais il est peu de personnes qui l'entendent : cependant chaque royaume, chaque province, chaque ville a ses besoins en ce genre ; la nécessité, la commodité, le luxe, ne peuvent se passer du secours de l'eau ; il faut la conduire au centre de nos habitations, nous garantir de ses ravages, lui faire mouvoir des machines qui soulagent notre faiblesse, décorer nos demeures, embellir et nettoyer nos villes, augmenter ou conserver nos domaines, transporter de province à province, ou d'un bout du monde à l'autre, tout ce que le besoin, la délicatesse

ou le luxe ont rendu précieux aux hommes ; il faut contenir de grands fleuves, changer le lit des rivieres, creuser des canaux, bâtir des aquéducs. Qu'arrive-t-il ? Faute de principes, on adopte des projets dont la dépense n'est que trop réelle, mais dont le succès est chimérique ; on exécute des travaux dont l'objet se trouve manqué ; on constitue l'état, les provinces, les communautés, en des frais considérables, sans fruit, souvent même à leur préjudice ; ou du moins il n'y a point de proportion entre la dépense et les avantages qui en résultent.

La cause d'un si grand mal, je le répete, est l'incertitude des principes, la fausseté de la théorie que l'expérience dément, le peu d'observations faites jusqu'à-présent, et la difficulté de les bien faire. On a fait, à la vérité, quelques expériences sur le mouvement de l'eau, à la sortie des orifices ; et on en a déduit une théorie qui émane de celle de la chûte des graves, et des regles que suit la pression des fluides. Jusque-là la marche est assurée. L'hydrostatique en effet est fondée sur des principes fort simples, qui rendent raison des lois que suivent les fluides dans l'état de repos, en vertu de deux propriétés, la pesanteur et la fluidité, qui agissent seules dans ce cas. Mais

sur quel raisonnement peut-on fonder l'application des formules de l'hydrostatique au cours uniforme d'un fleuve, qui ne peut devoir la vîtesse avec laquelle il se meut, qu'à la *pente de son lit prise à la surface du courant*, à sa largeur et à sa profondeur ? Il est vrai que, dans les deux cas, la gravité est la cause générale du mouvement; mais dans les eaux courantes, il est une loi qui modifie ce principe, loi dont la découverte doit servir de base à l'hydraulique, et faire rejeter toute théorie fondée sur des hypotheses imaginaires, qui ne peuvent conduire qu'à des conséquences absurdes.

Quand on eut découvert, par l'expérience, que *la vîtesse de l'eau qui sort d'un* vase par un orifice, est proportionnelle à la racine quarrée de la charge, on s'occupa d'abord à vérifier ce fait assez surprenant; et, par une étrange méprise, on voulut appliquer ce principe à toute espece de mouvement des eaux. Varignon, Mariotte, Guglielmini, et tous les autres, en font la base de l'hydraulique. Ce dernier calcule par la parabole la vîtesse des filets d'une riviere à différentes profondeurs, et la suppose nulle à la surface, plus grande au milieu, et la plus grande au fond. C'est d'après cette hypothese qu'il assigne la dépense

du Danube dans son Traité des Eaux courantes : il était cependant trop bon observateur, ainsi que Mariotte, pour ne pas s'appercevoir que, dans les tuyaux de conduite et dans le lit des rivieres, le frottement de l'eau contre les parois altere et dénature entièrement l'ordre des vîtesses d'un orifice. Mariotte a fait à cet égard quantité d'expériences utiles; mais il n'en déduit aucune regle générale.

Guglielmini cependant rectifia ensuite ses premieres idées, d'après un grand nombre d'observations qu'il fit sur le cours des rivieres. On voit dans son ouvrage de la Nature des Fleuves, qu'il s'est bien apperçu que la résistance du fond retarde considérablement la vîtesse; et, selon lui, la viscosité de l'eau procure aux molécules supérieures plus de vîtesse qu'elles n'en devraient avoir, suivant la loi parabolique : il observe que la vîtesse moyenne est souvent au milieu de la profondeur ; que les obstacles multipliés font perdre la vîtesse acquise par la chûte; que la pente alors diminue, et qu'elle peut devenir très-petite ; il trouve que, vers le bas de son cours, le Reno n'est incliné que de 50 secondes, ce qui revient à une pente moindre que $\frac{1}{4000}$; mais il pense que l'eau, en augmentant de profondeur, acquiert par la pression la force de la

chûte qu'elle avait perdue; il n'a pas ignoré qu'il existe un rapport entre l'action du courant et la consistance du lit; que les fleuves ont la force de ronger le fond, et de diminuer leur pente à la longue, quand leur vîtesse est trop grande, et qu'il y a un point d'équilibre entre cette force et la ténacité du sol, qui s'établit naturellement par l'élargissement du lit.

Quant à l'intensité du frottement de l'eau, nous venons de trouver, depuis la publication des Principes d'Hydraulique, que M. Pitot avait posé depuis long-temps un principe fondamental à cet égard. Parmi les Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1728, on en trouve un *de cet académicien, dans lequel*, après avoir démontré qu'à mesure que les corps augmentent de volume, leurs surfaces croissent en moindre rapport, ou qu'en général le rapport des surfaces aux solidités est comme l'inverse des côtés homologues; il en fait l'application aux résistances des corps semblables, qui se meuvent dans les fluides; et il conclut, en parlant du frottement de l'eau dans les tuyaux, qu'à vîtesses égales, il est, par rapport au volume d'eau, en raison inverse des diametres.

M. Couplet fit ensuite des expériences sur

les conduites d'eau de Versailles, qui donnerent une idée de la grande altération que le frottement occasionne au cours de l'eau : ces expériences ne furent pas assez multipliées; d'ailleurs les moyens étaient trop imparfaits; aussi la théorie qu'il en a voulu déduire, et celle que M. Belidor y a substituée, ne méritent aucune considération.

Telles étaient nos connaissances sur le mouvement des eaux courantes, lorsque les plus grands géometres, MM. Daniel Bernoulli et d'Alembert, soumirent ce mouvement aux recherches de l'analyse la plus savante et la plus compliquée. Commençant par les cas les plus simples, ils ont examiné d'abord l'écoulement par des orifices, dans lesquels le frottement est le moins sensible. Newton les avait précédés dans cette recherche; mais la différence des résultats a été la suite de celle des hypotheses qu'ils avaient adoptées; et l'expérience n'a pas toujours avoué leurs principes. Ces efforts ont du moins servi à montrer la difficulté de soumettre à l'analyse le mouvement des fluides; et l'on n'a pas même tenté d'en faire l'application au cours des rivieres d'une certaine conséquence. Enfin, M. l'abbé Bossut a senti la nécessité de prendre l'expérience pour guide dans des recherches aussi délicates; il a fait,

avec une sagacité digne de lui, et avec une exactitude étonnante, un grand nombre d'observations sur le mouvement de l'eau qui coule par des orifices de différentes especes, par des tuyaux de diametres et de longueurs différents, et dans des canaux factices. C'était sans doute le seul chemin qui pouvait conduire à la vérité; et M. l'abbé Bossut a ouvert la carriere d'une maniere si neuve et si judicieuse, qu'il a, pour ainsi dire, le mérite de tous les efforts qui ont succédé aux siens.

Personne ne peut nier que si deux fleuves ont même profondeur, même largeur et même pente, et qu'ils coulent sur un fond homogene, leurs vîtesses ne différeront en rien; mais si on vient à *changer un seul de ces accidents*, la vîtesse croîtra ou *diminuera*, sans cesser néanmoins d'être uniforme. Jusqu'à-présent aucune théorie connue n'apprend à calculer la vîtesse, d'après ces données : or, la vîtesse étant inconnue, la dépense l'est aussi; et, par une suite nécessaire, on ne peut prévoir le succès d'aucune opération sur le lit des fleuves, ni résoudre un seul problême qui y ait rapport.

Frappé de l'ignorance où nous laissent nos meilleurs auteurs sur une matiere aussi importante, je dévorai la partie de l'Hydrodynamique

de M. l'abbé Bossut, qui traite du mouvement des eaux, aussitôt que cet ouvrage devint public, et j'y cherchai la solution du problême qui me paraissait devoir être la clef de l'hydraulique; c'est-à-dire, de déterminer quelle est la vîtesse d'un courant dont la pente et le lit sont donnés; mais les expériences n'étaient point encore assez décisives ni assez variées pour atteindre jusque-là : je ne sais si l'ouvrage que je venais de parcourir me communiqua une portion de la sagacité de son auteur; mais je me mis à considérer que si l'eau était parfaitement fluide, et qu'elle coulât dans un lit infiniment poli, de la part duquel elle n'éprouvât aucune résistance, elle accélérerait son mouvement à la maniere des corps qui glissent sur des plans inclinés : car il est évident que la pente à la surface est la seule cause efficace qui engendre son mouvement, puisque sans elle le mouvement n'a pas lieu. Or, la vîtesse d'un fleuve ne s'accélere pas à l'infini; au contraire elle persévere dans un degré assez borné, quand elle a atteint l'uniformité, et elle n'augmente plus ensuite sans cause; d'où il suit qu'il existe quelque obstacle qui détruit la force accélératrice, et l'empêche d'imprimer à l'eau de nouveaux degrés de vîtesse. Or, en quoi peut consister cet obstacle, sinon dans

le frottement que l'eau essuie de la part des parois du lit, et dans la viscosité du fluide? La viscosité seule peut donner lieu à deux especes de résistance; l'une qui vient d'un mouvement intestin des parties du fluide, dont la mobilité est imparfaite; et l'autre de l'adhésion naturelle que ces parties ont avec le lit dans lequel elles se meuvent.

Ces causes agissant ensemble, et venant à égaler la force accélératrice de l'eau courante, c'est-à-dire sa force relative pour descendre le long du plan incliné de son lit, la vitesse ne peut plus augmenter, et elle devient uniforme. C'est donc un principe évident et certain tout-à-la-fois, que *quand l'eau coule uniformément dans un lit quelconque, la force accélératrice qui l'oblige à couler est égale à la somme des résistances qu'elle essuie, soit par sa propre viscosité, soit par le frottement du lit.* Cette loi me paraissait aussi ancienne que la création des fleuves, et devoir être la clef de l'hydraulique : elle se présente à l'esprit d'une maniere lumineuse, et elle est d'ailleurs la base fondamentale de tout mouvement uniforme.

Encouragé par cette découverte, et par la fécondité de ce principe dans les différentes applications qu'on en peut faire à la pratique, et à la solution de quantité de beaux problêmes,

je me persuadai que le mouvement de l'eau dans un tuyau de conduite avait une grande analogie avec le cours uniforme d'un lit de riviere, puisque de part et d'autre la pesanteur était le moteur, et la résistance du lit le modérateur. Je me servis donc, pour faire une formule du mouvement uniforme, des expériences de M. l'abbé Bossut sur les tuyaux de conduite, et même de celles qu'il avait faites sur des canaux factices, quoiqu'il y manquât une donnée, qui était la profondeur du courant. C'est ainsi que je composai l'ouvrage que j'ai donné au public, sous le titre de Principes d'Hydraulique, en l'année 1779.

Je sentais bien néanmoins qu'une théorie aussi nouvelle, et qui conduisait à des résultats tout-à-fait différents de la théorie ordinaire, avait besoin d'être appuyée sur de nouvelles expériences, plus directes que les anciennes, ou d'un genre tout-à-fait différent : car j'avais été obligé de supposer que le frottement de l'eau ne dépendait point de sa pression, mais uniquement de la surface frottée, et du quarré de la vîtesse. Je proposais donc une marche à suivre dans ce qui me semblait manquer aux expériences faites jusqu'alors, et je n'abandonnais mon travail à la critique qu'avec une sorte de crainte, qui cédait néanmoins à une intime

conviction de la certitude des principes que j'avais adoptés.

Mon manuscrit fut accueilli avec un intérêt singulier par M. de Fourcroy, directeur du corps royal du génie, résident près le ministre de la guerre : cet officier-général voulut bien m'aider et de ses conseils et de ses soins, pour la publication et la perfection de cet ouvrage ; je ne puis non plus trop reconnaître les facilités que M. Le Sancquer, commissaire ordonnateur des guerres, chef des bureaux de l'artillerie et du génie, m'a procurées pour le même objet. Les vrais citoyens aiment tant le bien public, qu'ils en embrasseraient jusqu'à l'ombre. M. le prince de Montbarrey, alors *ministre de la guerre, voulut bien agréer que* je lui dédiasse *les Principes d'Hydraulique*, et me fit l'honneur de les mettre sous les yeux du Roi. Sur le compte qui lui fut rendu par M. de Fourcroy de l'utilité des vues nouvelles que je présentais, et de la nécessité de nouvelles expériences pour vérifier les principes, le ministre ordonna un fonds annuel, destiné à y être employé par mes soins. Ainsi, dès l'année 1780, et pendant les suivantes 1781, 1782, et 1783, je travaillai assidument à ces expériences, étant secondé par MM. Dobenheim et Benezech de Saint-Honoré, officiers au corps royal du

génie, dont le zele et la capacité sont connus. Le dernier sur-tout s'affectionna particulièrement à ce travail, et m'a été d'un si grand secours, que je puis dire qu'on lui doit la perfection à laquelle nous avons porté la théorie du mouvement de l'eau, et la formule qui le représente. La grande facilité avec laquelle il manie le calcul, a suppléé à ce qui me manquait à cet égard, et il a embelli cet ouvrage de plusieurs beaux problêmes, et de quantité de recherches importantes. C'est donc avec raison que je parle presque toujours au pluriel.

Nos nouvelles expériences devaient être le complément de celles qu'on avait faites jusqu'alors, sur-tout par rapport au mouvement uniforme. Or, on en manquait principalement pour les cas extrêmes des lits très-petits, et des lits d'une grandeur approchante de ceux des rivieres.

M. l'abbé Bossut n'avait donné, dans son Hydrodynamique, que des pentes médiocres à ses tuyaux de conduite ; on manquait d'observations sur les plus grandes pentes et sur les très-petites : nous nous sommes donc appliqués à suppléer, autant qu'il a été possible, à ce qu'on n'avait pas fait jusqu'ici, sans négliger néanmoins de répéter plusieurs expé-

riences, qui avaient une relation plus rapprochée avec celles qui étaient déja faites, afin de vérifier par-là l'exactitude des unes et des autres, et sur-tout la précision de nos procédés. Ainsi nous avons employé des pentes depuis la plus grande de toutes, qui est la verticale, jusqu'à un quarante-millieme; et nous avons de même soumis à l'expérience, des lits, depuis une ligne et demie de diametre jusqu'à sept ou huit toises quarrées de surface.

Les expériences qui nous ont donné plus de peine, sont celles où nous avons employé un canal factice, qui avait la forme d'un trapeze ou d'un rectangle, selon la maniere dont on assemblait les madriers qui le composaient. Nous avons éprouvé de grandes difficultés à rendre uniforme le cours de l'eau dans ce canal, dont la longueur était bornée; mais nous avons été bien dédommagés de nos peines, par les expériences que nous avons eu occasion d'y faire sur la diminution des vîtesses d'un courant uniforme, à compter du milieu de la surface jusqu'au fond; par la recherche du rapport qui existe entre la vîtesse moyenne et celles de la surface et du fond; par des observations très-curieuses sur la maniere dont l'eau travaille le fond de son lit; par la connaissance du degré de résistance qu'opposent à l'eau des

natures de terrain différentes, comme les galets, le gravier, le sable, et l'argile.

Nous n'avons pas borné là tout l'usage que nous devions faire du canal factice : ayant la facilité de mesurer exactement les dépenses dans tous les cas, nous avons fait des reversoirs de différentes especes, des tenues et des ponts factices ; et nous avons tenu compte des dépenses et des remous qui en résultaient.

Enfin, pour abréger un détail qui trouvera sa place ailleurs, nous avons soumis à l'expérience des tuyaux coudés de différentes manières, dont nous avons comparé les dépenses et les charges à celles des tuyaux droits de même diametre et de même longueur.

Jusque-là nous nous étions occupés du mouvement des eaux, uniforme ou varié ; et c'était là le principal objet que nous avions en vue. L résistance des fluides méritait cependant bien que nous fissions quelques tentatives pour tirer au moins quelqu'une de ses lois de l'obscurité où la nature semble les avoir enveloppées. On trouve d'extrêmes difficultés à déterminer l'effort dont est capable un fluide dont la masse se meut, et rencontre une surface ou un corps solide qui l'oblige à se détourner. Pour y réussir, il faudrait connaître la loi suivant laquelle chaque molécule doit

s'écarter de sa premiere direction, et la route qu'elle doit suivre pour éviter cette surface, pour la toucher quelquefois, et pour repasser enfin derriere, en reprenant la simplicité de son premier mouvement.

Supposer, comme on l'a fait jusqu'à-présent, que chaque particule élémentaire vienne frapper immédiatement à son tour la surface ou le corps, c'est supposer l'anéantissement des molécules après la percussion, et fonder la théorie sur une hypothese chimérique. Or, les conséquences des principes imaginaires ne peuvent jamais être vraies, et les formules analytiques qu'on en tire *ne peuvent pas peindre l'image sensible du mouvement actuel et physique d'un fluide*, pour me servir des termes de M. l'Abbé Bossut. Ainsi elles n'offrent à l'esprit que des fantômes, qui peuvent avoir l'air de la vérité, mais qui n'en peuvent jamais être le symbole.

C'est donc à l'expérience seule à nous éclairer sur la direction du mouvement des particules invisibles des fluides, d'où naissent leurs forces percussives : car, puisqu'il répugne au raisonnement que chaque partie frappe directement à son tour la surface opposée au mouvement général du fluide, il est peut-être vrai qu'aucune ne le fait; et cette supposition est

bien plus probable que son opposée. De même si le choc a une énergie pour faire céder la surface, en la pressant antérieurement, la faite du fluide, à la partie postérieure, ne doit-elle pas occasionner un défaut de pression, qui augmente la résistance que doit faire la surface, pour rester immobile ? A quoi l'analyse peut-elle servir ? Quel principe peut-elle saisir, pour s'étayer et se guider dans des recherches de cette nature ?

Quoi qu'il en soit, c'est en vain qu'on s'efforce de trouver des rapports entre les résistances qu'éprouvent différents corps, terminés par des surfaces planes ou courbes, si ces corps ne sont pas semblables. Ainsi il faut comparer ensemble des plans sans épaisseur, des cubes, des spheres, des prismes, des pyramides semblables ; et, dans ce cas, on trouve toujours les résistances proportionnelles aux surfaces choquées, et aux quarrés des vîtesses. De là suit le moyen de connaître la résistance des vaisseaux par une simple expérience en petit sur un modele semblable.

Toutes les expériences que nous nous étions proposé de faire étant achevées, j'en rendis compte, le 31 mars 1783, à M. le maréchal de Ségur, ministre de la guerre, qui avait bien voulu accorder la même protection et les mêmes

secours à mon entreprise, par un mémoire très-détaillé, que je donne presque en entier dans la seconde partie de cet Ouvrage : ce ministre l'adressa à MM. de l'académie des sciences, pour l'examiner et lui en rendre compte ; ce qu'ils firent d'une maniere bien propre à m'encourager. Il fallait donner à ce travail une forme sous laquelle il pût être rendu public ; et mon dessein avait été d'abord de laisser subsister mon premier ouvrage des Principes d'Hydraulique, en y ajoutant un deuxieme volume, qui aurait compris nos expériences, et la formule du mouvement uniforme de l'eau, perfectionnée d'après les observations. Cela m'avait paru d'autant plus convenable, que l'expérience n'avait démenti en rien mes principes. Néanmoins, pour la commodité des lecteurs, et pour ne rien négliger de ce qui peut contribuer à rendre utile un travail fait par ordre et aux frais du Gouvernement, j'ai pris le parti de refondre entièrement mon premier ouvrage, et d'exposer d'une maniere toute neuve les principes avoués par l'expérience, en faisant marcher de front la théorie et les observations. Par-là les applications à la pratique, et la solution des problêmes intéressants que j'avais déja donnés en

1779, deviendront plus sensibles, plus satisfaisants, et plus à la portée du public ; et les nouveaux problêmes se lieront mieux avec la chaîne des vérités, qui pourrait échapper dans un discours décousu. Il me reste à donner en peu de mots le plan de cet ouvrage.

J'ai renfermé dans la premiere partie tout ce qui concerne le mouvement uniforme et varié des eaux courantes ; dans la seconde, le détail de nos expériences en ce genre ; et dans la troisieme ce que nos propres observations, combinées avec celles d'autrui, nous ont appris sur la résistance des fluides. Chacune de ces trois parties est divisée en plusieurs sections, et chaque section en différents chapitres.

Après avoir donné une idée générale de la fluidité, j'examine les circonstances du mouvement de l'eau, à la sortie des réservoirs, et sur-tout l'effet de la déviation des filets d'eau, qui se présentent sous différentes directions, pour sortir par un même orifice. Ce n'est pas que le mouvement des rivieres soit semblable à celui-ci; mais la contraction se trouve à chaque pas dans la nature : elle affecte les conduites d'eau, dont elle diminue la dépense ; les rivieres, au passage des ponts et des écluses ; les canaux à leur entrée ; les reversoirs, les aqué-

ducs; les fleuves mêmes à leur embouchure, quand le flux de la mer se présente pour les refouler dans leur lit. Ainsi il était nécessaire d'en donner une connaissance préliminaire.

J'entre ensuite dans le développement du principe fondamental du mouvement uniforme : c'est l'équilibre entre une puissance et une résistance. La puissance est la pesanteur relative de la colonne fluide, qui tend à se mouvoir sur le plan incliné de son lit ; la résistance est le frottement de ce lit, la viscosité du fluide, et son adhésion aux parois. Je suppose d'abord la résistance entiere proportionnelle au quarré des vîtesses ; et de là suit la formule primitive du mouvement uniforme de l'eau dans un *lit quelconque*.

J'appelle ensuite l'expérience, et je lui confronte cette théorie. Mais, pour corriger la derniere, il faut dépouiller l'un après l'autre les éléments variables, qui sont la grandeur du lit, son périmetre, et sa pente ; et examiner comment la vîtesse varie, selon que l'un de ces éléments est variable, tous les autres étant constants, Cette analyse découvre pour quelle part le frottement, la viscosité du fluide, et son adhésion aux parois, entrent chacun dans la résistance totale. Chaque effet se trouve repré-

senté par une expression analytique convenable; la loi du mouvement se développe depuis des vîtesses infinies jusqu'à l'anéantissement du mouvement même : une seule formule la représente, et embrasse tous les cas; et la parfaite conformité des résultats du calcul avec ceux de l'expérience, assure et démontre la vérité des principes, et la justesse de leur application.

Cette base posée, je jette un coup-d'œil sur la variété des lits où l'eau coule, soit naturellement, soit par l'effet de l'art, sur les différentes vîtesses d'un même courant, sur l'intensité de la-résistance produite par l'inertie du lit, sur la force que l'eau a pour creuser et élargir sa section; je tâche de remonter à l'origine de ces vastes décharges, de ces grands fleuves, qui, comme la tige vigoureuse d'un arbre, se partagent en mille rameaux, qui couvrent la surface du globe, et servent autant à le dessécher et le rendre habitable, qu'à le fertiliser et l'embellir.

Un fleuve, considéré depuis sa source jusqu'à la mer, est l'image des différents âges de l'homme : ses commencements sont peu de chose; il sort de la terre, mais il tire son origine d'en haut : son enfance est capricieuse et

badine; il fait tourner un moulin, il se joue sous les fleurs : sa jeunesse est impétueuse et bouillante; il choque, il déracine, il renverse : le milieu de son cours est sérieux et prudent; il se détourne, il cede aux circonstances : dans sa vieillesse il est mesuré dans ses démarches, paisible et majestueux, ennemi du bruit; il roule en paix ses eaux tranquilles, et bientôt il ira s'abîmer dans l'immensité des mers. Je tâche de le suivre dans sa course; je développe ses sinuosités; j'étudie son régime et la loi de sa stabilité; je cherche la cause de ses détours, et, pour ainsi dire, de ses écarts.

L'étude des lois naturelles satisfait l'esprit; mais elle a encore un but plus utile : elle nous montre le moyen d'*aider la nature*, d'accélérer ses opérations, que notre impatience ou la nécessité trouve trop lentes; de maîtriser les éléments, de les faire servir à nos besoins. La théorie doit donc être appliquée à la pratique, et c'est ce que nous essayons de faire dans la troisieme section. Nous y examinons l'effet des accrues formées par la réunion permanente de plusieurs rivieres dans un même lit, ou d'une crue extraordinaire, qui gonfle les eaux d'un fleuve; l'effet des redressements qui deviennent quelquefois nécessaires pour prévenir les

débordements; la dépense d'un reversoir; la hauteur du remou qu'occasionne une tenue ou un pont; la distance où l'effet du remou se rend sensible au-dessus des écluses par le refoulement des eaux; la maniere de calculer la hauteur de ce remou à une distance quelconque d'une écluse; les moyens de rendre navigable une riviere, à laquelle trop peu d'eau, ou trop de pente, ne permettent pas de porter bateau ou d'être flottable; l'effet des saignées; l'établissement des canaux de desséchement, des regles sûres pour opérer un desséchement complet, avec le moins de dépense possible; comment, et dans quel cas on peut doubler, tripler, etc., la dépense d'eau d'un canal de dérivation; quelle est la forme qui convient le mieux aux entrées des canaux, aux piles des ponts, aux bajoyers des écluses. Enfin, après avoir traité des obstacles qui retardent l'écoulement de l'eau, comme les roseaux, le vent, la glace, nous examinons pourquoi un corps qui flotte librement à la surface d'un courant, y acquiert une plus grande vîtesse que celle du fluide qui le porte; et dans quel cas la surface d'un courant est quelquefois convexe, et quelquefois concave.

Après avoir donné la principale attention

aux rivieres et aux canaux dont les services sont plus importants, ou les désordres plus à craindre, nous nous occupons, dans la quatrieme section, des aquéducs, des conduites et des jets d'eau, qui ont plutôt pour objet la salubrité, la propreté ou l'agrément. On trouvera cette matiere traitée avec la précision qui dérive de la netteté de la théorie. Cette section est terminée par la théorie du mouvement de l'eau dans les pompes; et, par occasion, nous parlons de l'effet des machines à feu, de la force qu'il faut pour les mouvoir, et des effets des fluides élastiques.

La seconde partie contient le détail des expériences nombreuses que nous avons faites sur le mouvement uniforme et varié de l'eau. Non-seulement il est juste de faire part au public du détail des observations sur lesquelles est fondée notre théorie; mais on serait en droit de douter de notre exactitude, de soupçonner même que l'esprit de systême a pu nous séduire au point de nous prévaloir de quelques expériences isolées ou infideles, pour autoriser nos préjugés, et en imposer par l'air de la nouveauté, si nous ne rendions compte de nos procédés, et des moyens qui nous ont conduits à chaque résultat. C'est ici la partie la plus impor-

tante de cet ouvrage; tout y appartient à la nature, et se trouvera vrai dans tous les temps, parce que les effets naturels ne dépendent pas des raisonnements de l'homme, et qu'il ne faut que les bien observer. J'ai tâché de les exposer par ordre et avec clarté, pour inspirer la confiance, pour mettre le lecteur à même de juger si les expériences sont concluantes et décisives, et même pour qu'on puisse répéter et vérifier celles qui n'exigent pas un trop grand appareil. A la tête de chaque genre d'expériences, on rend compte de la fin ou du but qu'on s'est proposé en les faisant, ensuite de la préparation avant de les faire, du résultat qu'elles ont donné, et enfin des réflexions qui en sont la suite. C'est le moyen d'en donner une parfaite connaissance.

La troisieme et derniere partie est le résultat de nos essais sur la résistance des fluides: nous y considérons, dans deux sections différentes, la résistance de l'eau et celle de l'air, d'une maniere absolument neuve, en ne tenant aucun compte de l'ancienne théorie, que l'expérience a tant de fois désavouée, et en cherchant de nouvelles vues dans des observations qui jusqu'à-présent n'avaient point été faites.

Il est étonnant que, dans un siecle aussi

éclairé, on sache si peu de choses sur la résistance des fluides ; et que, tandis qu'on fait tous les jours usage de l'eau et de l'air pour mouvoir nos machines ou conduire nos vaisseaux, nous n'ayons pas, ou plus d'expériences, si la théorie est trop compliquée, ou plus de théorie, si elle doit être le fruit de l'expérience.

Quoi qu'il en soit, nous avons été assez heureux pour décomposer la résistance qu'un corps essuie pour se mouvoir dans un fluide, en deux efforts distincts, l'un qui s'exerce comme une pression en avant du corps, et l'autre comme un défaut de pression en arriere. Le premier est constant, si la grandeur et la forme du devant du corps restent les mêmes. Le second varie suivant la longueur du corps, et diminue toujours à mesure que cette longueur augmente, indépendamment de la forme de l'arriere du corps, qui fait aussi varier cette non-pression. La somme de ces deux efforts est sensiblement proportionnelle aux quarrés des vîtesses, lorsqu'elles n'excedent pas 3 à 4 pieds par seconde dans l'eau, et 20 à 24 pieds dans l'air ; mais au-delà de ces limites, la non-pression augmente en plus grande raison que le quarré des vîtesses, tandis que la pression antérieure lui reste proportionnelle. Un corps

essuie moins de résistance pour se mouvoir dans un fluide en repos, que pour résister à l'effort d'un fluide qui se meut contre lui; la pression antérieure qui s'exerce contre un plan qui se meut dans un fluide, ou qui en reçoit le choc, n'est pas uniforme sur tous les points de sa surface; mais elle diminue constamment du milieu à la circonférence; et cet effet, qui paraît inconcevable, n'est qu'un corollaire d'un principe qui peut être regardé comme fondamental dans la résistance des fluides: c'est que la pression latérale d'un fluide qui se meut, est toujours égale à celle qu'il exercerait s'il était en repos, moins celle qui est représentée par la hauteur due à la vîtesse avec laquelle il se meut.

Des expériences directes et bien vérifiées nous ont donné l'intensité de la pression et de la non-pression, ou la somme des résistances qu'essuient dans le fluide des surfaces planes, des cubes et des prismes, en vertu du mouvement du fluide ou du corps. Les expériences de Newton donnent celle de la sphère; mais cette nouvelle maniere d'envisager le choc est si étrangere à toute théorie, qu'on ne connaît plus de principe d'après lequel on puisse apprécier les résistances obliques.

Un autre genre d'expériences semble donner quelques lumieres sur un si grand problême. Tout corps mu dans un fluide communique son mouvement à une certaine quantité de fluide qui est relative à la figure et au volume du corps : une partie de ce fluide est poussée par le corps en avant de lui ; l'autre le suit par derriere. La plus grande section du corps, à laquelle on rapporte communément le choc, est la base sur laquelle semblent appuyés les volumes du fluide entraîné. Plus ces volumes seront grands, plus il semble que le fluide se dévie loin de ce plan de plus grande section, et plus le choc doit être petit. Ainsi, en joignant ensemble le volume du corps et celui du fluide entraîné, *plus cette somme sera grande* en comparaison du plan de plus grande section, plus le choc sera petit. Un simple plan sans épaisseur entraînera donc le moins de fluide possible, et essuiera le plus grand choc. Un corps aigu, plus ou moins long, dont ce plan serait la plus grande section, essuiera d'autant moins de résistance qu'il sera plus long ; et il en sera de même de tout corps régulier, ou engendré par un plan de révolution. Si on peut connaître, dans tous les cas, le volume du corps, plus celui du fluide entraîné, on connaîtra le rapport de la résistance qui

suivra la relation des volumes inverses. Ce raisonnement est en effet assez conforme à l'expérience, comme on le verra dans notre Ouvrage. C'est en faisant osciller dans l'eau les différents corps réguliers dont on cherche la résistance, qu'on trouve par le raccourcissement de la longueur du pendule, comparée aux temps de l'oscillation, la quantité du fluide auquel le mobile communique son mouvement. Du reste, l'expérience prouve que, quand les corps sont semblables, les résistances sont proportionnelles aux quarrés des côtés homologues et aux quarrés de vîtesses; et cette loi a lieu dans l'air comme dans l'eau, du moins pour les corps qui sont entièrement plongés dans ces fluides. Ainsi on peut appliquer à l'un des deux les expériences faites sur l'autre, en ayant égard au rapport de leurs densités, que nous montrons à apprécier très-exactement. Toutes ces recherches donnent du moins la résistance directe dans tous les cas, et mettent sur la voie pour la recherche des résistances obliques.

Tout ce qui précede n'a lieu que pour les vîtesses communes, qui ont ordinairement lieu dans la pratique. Mais pour les mouvements rapides, tels que ceux des corps lancés par les bouches à feu, nous faisons voir que les résistances croissent en beaucoup plus grande rai-

son que les quarrés des vîtesses, jusqu'à un certain terme, où le fluide cesse de suivre le corps, et où il se forme un vide derriere lui : à partir de ce point, si on augmente encore les vîtesses, les résistances croissent en moindre raison que leurs quarrés.

Nous terminons cet ouvrage par une application des expériences qui ont été faites à l'École Militaire sur la résistance des bateaux mus dans des canaux étroits, et par quelques nouvelles vues sur la meilleure maniere de disposer les coursiers et les roues des moulins à eau.

Puisse ce travail, qui nous occupe depuis dix ans, être un tribut utile que nous payons à la patrie, et contribuer au progrès d'une science d'où dépend en partie la splendeur, la force et la prospérité de ce royaume! Nous serons bien dédommagés de nos peines, si nos efforts paraissent avoir répondu à la confiance du Gouvernement, au zèle de ceux qui ont daigné favoriser notre entreprise, et au desir qui nous anime de mériter les suffrages de MM. de l'Académie, aux lumieres desquels nous soumettons les nôtres.

PRINCIPES D'HYDRAULIQUE.

PREMIERE PARTIE.

DU MOUVEMENT UNIFORME ET VARIÉ DES EAUX COURANTES.

SECTION PREMIERE.

THÉORIE GÉNÉRALE DU MOUVEMENT UNIFORME DE L'EAU.

CHAPITRE PREMIER.

Idée générale de la fluidité ; du mouvement de l'Eau à la sortie des réservoirs. Différentes contractions d'orifice.

1. La fluidité est une propriété des liqueurs que nous avons de la peine à concevoir, et que nous refuserions de croire, si l'usage et l'expérience ne nous l'avaient rendue familière ; c'est un phénomene physique qui n'a point été expliqué jusqu'à présent, et dont il est difficile de

rendre raison. Comment comprendre, en effet, qu'un corps matériel et incompressible soit composé de parties élémentaires si mobiles entre elles, et si peu adhérentes, qu'il prenne la figure de tous les vases où on le met; qu'il affecte toujours à sa surface un niveau parfait; qu'il repousse tous les corps qu'on y plonge avec une force égale au poids du liquide déplacé; qu'il fasse dans les siphons, ou lorsque le vent l'agite, des oscillations, des balancements, ou des ondulations isochrones et semblables à celles des pendules; et qu'enfin il s'écoule à la faveur de la moindre pente ?

2. Quelle que soit la figure sous laquelle on conçoive les parties élémentaires de l'eau, on ne peut s'empêcher d'admirer des propriétés si singulieres. Dira-t-on que les particules aqueuses sont de petites spheres, dont la surface est parfaitement polie, ou qu'elles sont encore entremêlées de parties de feu, infiniment plus petites qu'elles, et d'un poli aussi achevé, qui facilitent leur mouvement, et leur procurent une liberté parfaite pour agir, réagir, et se mouvoir suivant toutes sortes de directions ? Ajouterait-on que l'eau n'est liquide que lorsqu'il se trouve assez d'éléments de feu, entre les éléments de l'eau, pour empêcher le contact immédiat des derniers; mais qu'elle cesse de l'être quand ses éléments se touchent par la soustraction de parties de feu superflues, et cela en vertu de l'attraction qui agit à raison des surfaces, et de la proximité des par-

ties qui se touchent? Toutes ces hypotheses peuvent paraître probables; mais personne n'en peut démontrer la réalité. L'optique ne nous donne aucune notion sur la figure de ces molécules élémentaires, dont l'inconcevable ténuité fait qu'elles nous échappent; et nous sommes forcés d'avouer que la liquidité est une des merveilles dues à l'Auteur de la nature, qui a prodigué ses miracles selon la mesure de l'utilité qui en devait revenir à l'homme, en rendant l'élément de l'eau aussi commun qu'il est merveilleux en lui-même, et nécessaire aux usages journaliers, à la nutrition, à la végétation, et à la conservation des êtres organisés.

3. Il y a plusieurs liqueurs qui different essentiellement entre elles par leur nature, leur densité, leur poids et leurs propriétés. La *fluidité n'est pas au même degré dans toutes*. L'huile et les liqueurs grasses en ont moins que l'eau pure; et l'eau elle-même est plus ou moins fluide, à raison de sa pureté, et du plus ou moins de parties de feu qu'elle contient. Bouillante, elle est plus active et plus mobile; froide au contraire, et aux approches du terme de la congélation, elle paraît s'engourdir: au point de la glace, elle perd tout-à-coup sa fluidité, et acquiert une propriété toute contraire, sans cesser néanmoins d'être transparente.

4. Le premier phénomene et le plus familier qu'on a dû observer, par rapport au mouvement de l'eau, est la vîtesse avec laquelle elle s'écoule

par une ouverture ou *orifice* pratiqué au bas d'un réservoir. On trouva que cette vîtesse est proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur de la charge, c'est-à-dire, de la hauteur verticale qui se trouve depuis la surface de l'eau du réservoir jusqu'au centre de l'orifice; ou, ce qui revient au même, que les vîtesses de l'eau qui s'écoule sous différentes charges, croissent comme les vîtesses qu'un corps grave acquiert en tombant de différentes hauteurs. On pouvait être porté à croire l'analogie parfaite, c'est-à-dire, que la vîtesse de l'eau était égale à celle que le corps a acquise quand il est tombé d'une hauteur égale à celle du réservoir; mais on s'aperçut qu'il y avait un déchet sur cette vîtesse, et que le mouvement du fluide est retardé de la même maniere que si l'orifice était diminué d'une certaine quantité, ou que l'action de la gravité fût moindre. Cet effet fut appelé contraction; et on sait aujourd'hui qu'il dérive nécessairement de la nature de tous les fluides, qui, n'étant qu'un assemblage, un système de molécules, ne peuvent s'écouler que dans l'ordre et suivant la marche qui convient à l'équilibre général de toutes leurs parties, en vertu de la pesanteur qui est la force motrice, et des obstacles qui s'opposent à l'entier effet de cette force. La gravité est constante, à la vérité, du moins pour un même lieu; mais il y a une variété infinie dans les circonstances qui modifient les obstacles; d'où il suit que la contraction est variée à l'infini. Ainsi il ne peut y avoir de formule générale du

mouvement de l'eau, ni d'aucun fluide. Ce mouvement ne peut être représenté que par des formules différentes qui conviennent à divers cas, où les données sont constantes, et dans lesquels la résistance agit d'une maniere semblable. Ces cas, où il est plus important de savoir calculer le mouvement de l'eau, ont été déterminés par la nature, ou par les divers usages que nous faisons de ce fluide. On peut les réduire à quatre principaux. 1° Quand un réservoir se vide par un orifice percé dans une mince paroi; 2° quand on emploie un tuyau additionnel d'une certaine longueur; 3° quand on oblige l'eau à passer par un tuyau fermé, ou dans un canal ouvert, dont la section est constante, et la longueur assez grande pour que le mouvement y devienne uniforme; 4° quand l'eau s'échappe par des reversoirs. Les deux premiers ont été *savamment* traités par M. l'abbé Bossut; nous traiterons, dans cet ouvrage, le troisieme avec toute l'étendue que mérite son importance; et nous parlerons en peu de mots du quatrieme, dont l'application est plus rare. Mais la contraction étant le premier élément qui modifie le mouvement dans tous les cas, il est nécessaire d'en acquérir une connaissance distincte, et de savoir l'apprécier autant qu'il est possible.

5. L'eau ne peut sortir d'un réservoir par un orifice quelconque, sans que ses parties n'affluent de toutes parts, autant qu'elles le peuvent, vers cet orifice, comme vers un centre, par un mou-

vement accéléré, et suivant toutes les directions. Le seul filet qui répond au centre de grandeur de l'orifice, décrit la ligne la plus droite qu'il est possible. Si l'orifice est horizontal, et placé au centre du fond d'un réservoir, dont on suppose la grandeur infinie par rapport au diametre de l'orifice, ce filet doit descendre verticalement, sans se détourner d'aucun côté, et il n'a à essuyer d'autre résistance que celle du frottement causé par l'excès de sa vîtesse sur celle des filets collatéraux; mais comme cet excès est infiniment petit, sa vîtesse finale est sensiblement due à toute la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice. Ainsi, en nommant g la vîtesse acquise par un grave à la fin de la premiere seconde, et h la hauteur du fluide, on sait que cette vîtesse, par seconde, sera $\sqrt{2g}\sqrt{h}$, ou $\sqrt{724}\sqrt{h}$, * en prenant le pouce pour l'unité de mesure. Les autres filets qui composent la colonne verticale du réservoir, après être descendus presque verticalement pendant quelque temps, sont obligés de se détourner de la verticale par des courbes plus ou moins alongées, pour s'approcher de l'orifice; et en y arrivant enfin, ils ont des directions qui approchent plus ou moins de l'horizontale, selon qu'ils sont destinés à passer plus ou moins près du bord de l'orifice ou de son centre. Le mouvement de ces filets se décompose donc suivant deux directions;

* Voyez ce qui est dit plus en détail, sur cette expression de la vîtesse, part. IV, sect. 1, § 123.

l'une horizontale, où il se perd, par la résistance diamétralement opposée des filets qui leur répondent de l'autre côté; et l'autre verticale, en vertu de laquelle ils font effort pour passer par l'orifice. On voit par-là que la vîtesse verticale des filets, rangés sur un même rayon de l'orifice, décroît du centre à la circonférence, et qu'ainsi la dépense totale doit être moindre qu'elle ne serait, si tous les filets pouvaient se mouvoir verticalement, comme celui de l'axe. Il suit encore delà, que les filets qui avoisinent le centre allant plus vîte que ceux qui sont plus près des bords, la veine fluide, après être sortie de l'orifice, doit former un cône, dont l'orifice est la base; c'est-à-dire, qu'elle doit diminuer de diametre au moins jusqu'à une certaine distance; parce que les filets extérieurs sont peu à peu entraînés, en vertu de la viscosité, par les filets intérieurs, dont la vîtesse est plus grande, sans pouvoir se séparer d'eux; d'où il résulte une diminution dans le diametre de la veine. Cet effet a été nommé pour ce sujet *contraction*, et le plus petit diametre s'appelle *diametre de la veine contractée*.

6. M. l'abbé Bossut a observé que le point de la plus grande contraction est distant du plan de l'orifice, d'une longueur à peu près égale à son rayon, et que le diametre de la veine contractée est à celui de l'orifice à peu près dans le rapport de 10 à 12,25, tellement que l'aire de l'orifice est à l'aire de la veine contractée, comme trois est à deux, environ. On sent bien que cette mesure est

très-délicate à prendre, et que ce ne sont que des résultats moyens. Quoi qu'il en soit, si l'effet qu'on vient de voir avait semblablement lieu dans les orifices mêmes, à toute charge, à tout diametre, et dans la situation verticale comme dans l'horizontale, on aurait la mesure exacte de la dépense par seconde dans tous les cas, pourvu qu'on sût par l'expérience, le rapport qui existe entre la dépense qui aurait lieu, si tous les filets étaient mus avec la vîtesse due à la charge entiere, et celle qui est effectivement donnée par l'observation. La premiere se nomme naturelle; et en nommant A l'aire de l'orifice, elle est égale (5) à A $\sqrt{724h}$. La seconde est la dépense effective qui est moindre dans un certain rapport. On peut exprimer celle-ci en deux manieres différentes: 1° en multipliant par $\sqrt{724h}$ une aire moindre que celle de l'orifice; 2° en multipliant l'aire entiere de l'orifice par $\sqrt{724-K}\sqrt{h}$, en nommant K une perte de gravité quelconque que l'expérience doit donner. Cette derniere expression est préférable à la premiere, parce que l'aire entiere et la hauteur y restent exprimées, et qu'elle donne d'ailleurs la vîtesse moyenne de tous les filets qui passent par l'orifice. Mais si on voulait connaître la vîtesse moyenne des filets au point de contraction, comme nous verrons dans la suite que cela est nécessaire pour évaluer la hauteur des jets d'eau qui sortent d'une mince paroi, il faudra connaître le vrai diametre de la veine contractée, et l'employer dans l'expression de la dépense.

7. Si on nomme D la dépense effective trouvée par une expérience, on aura $D = A\sqrt{724-K}\sqrt{h}$, d'où l'on tire $724-K = \left(\frac{D}{A\sqrt{h}}\right)^2$: en appliquant cette formule aux expériences que M. l'abbé Bossut a faites sur des orifices horizontaux, verticaux et inclinés, qui, à même charge, donnent sensiblement les mêmes dépenses, on trouve les résultats suivants.

Pour un orifice mince d'un pouce de diametre, dont le centre est douze pouces au-dessous de la surface de l'eau du réservoir, la quantité 724 — K est égale à 277,777; et elle diminue insensiblement, à mesure que les charges augmentent, tellement qu'elle se réduit à 275,201 pour une charge de 11 pi 8 po 10 li, et à 274,131 pour une charge de 15 pieds. Au contraire, dans une expérience où l'orifice n'était recouvert que d'une ligne de hauteur d'eau, cette quantité s'est trouvée égale à 304,193. Mais il est visible qu'alors il n'y avait point de déviation des filets à la partie supérieure de l'orifice, et la contraction devait par conséquent être moindre. Comme donc la légere diminution qu'éprouve la quantité 724 — K, à mesure que les charges augmentent, peut être attribuée au frottement contre les bords de l'orifice et à la résistance de l'air, qui s'opposent à la sortie de l'eau, avec d'autant plus de force, que les vîtesses deviennent plus grandes, nous pouvons conclure, d'après l'expérience, la quantité 724 — K, sensiblement constante et égale à 278 pour

les charges ordinaires, quand on emploie un orifice simple d'un pouce de diametre.

Les expériences sur des orifices plus grands donnent encore sensiblement le même résultat: avec une charge de $11^{pi}\ 8^{po}\ 10^{li}$, un orifice de deux pouces de diametre, donne, par sa dépense, la quantité 724 — K égale à 276,374, qui differe peu de celle qui répond, à même charge, à l'orifice d'un pouce. Cette légere augmentation peut être attribuée à la moindre déviation des filets, causée par le moindre rapport dela capacité du réservoir au diametre du nouvel orifice, ou au frottement des parois, qui est aussi moindre à proportion.

La figure de l'orifice influe aussi très-peu sur la dépense et sur la valeur de la quantité que nous considérons : qu'il soit circulaire, quarré, rectangulaire et même triangulaire, pourvu qu'il ait même surface. Cependant on ne peut pas nier que les orifices qui ont moins de périmetre à surface égale, ne donnent un peu plus de dépense que les autres ; mais on peut négliger, dans la pratique, ces légeres augmentations, et la formule $D = A\sqrt{278h}$ représente sensiblement la dépense par seconde, exprimée en pouces cubes, d'un orifice percé dans une mince paroi. La vîtesse moyenne de l'eau, à son passage par cet orifice, est exprimée par $\sqrt{278h}$; en nommant V et u la vîtesse naturelle et la vîtesse moyenne effective, on a $V : u :: \sqrt{724} : \sqrt{278} :: 8 : 5$, à peu de chose près.

8. Si la dépense effective des orifices simples était les $\frac{2}{3}$ de la dépense naturelle, ces deux dépenses seraient entre elles dans le rapport de la sphere au cylindre, et on en conclurait que, dans un diametre quelconque de l'orifice, les vîtesses des filets, qui répondent à chaque point de ce diametre, seraient représentées par l'élément correspondant du méridien de la sphere ; que la vîtesse des filets qui touchent la paroi serait nulle, et que celle dans le centre de l'orifice est due à la charge entiere. Ces conséquences ne s'écartent pas beaucoup de la vérité ; et si elles ne sont pas tout-à-fait exactes, si la dépense effective est un peu moindre que les $\frac{2}{3}$ de la vîtesse naturelle, il est probable que la viscosité du fluide en retarde l'écoulement. On peut au moins juger par-là dans quel ordre décroissent les vîtesses depuis le centre de l'orifice jusqu'à sa circonférence, eu égard à la déviation des filets, qui est la principale cause de la diminution de la dépense.

9. La seconde espece de contraction d'orifice est celle qui a lieu quand l'eau sort d'un réservoir par un tuyau d'une longueur médiocre, comme de deux ou trois fois son diametre, et qu'elle coule à plein tuyau, en suivant ses parois intérieures. En appliquant la formule $724 - K = \left(\frac{D}{A\sqrt{h}}\right)^2$ aux expériences de M. l'abbé Bossut, sur ces tuyaux additionnels, on trouve que pour une charge de douze pouces, la quantité $724 - K$ est égale à 469,58, et qu'elle diminue insensiblement à mesure que les charges augmentent ; tel-

lement qu'à 15 pieds de charge, elle n'est plus que de 463,756. Ses variations dépendent des mêmes causes que nous avons marquées ci-devant; et on pourrait supposer que, pour une charge moyenne ordinaire, elle est égale à 470. On aurait donc pour les tuyaux additionnels $D = A \sqrt{470h}$: mais M. l'abbé Bossut avertit que les dépenses des tuyaux additionnels qu'il rappòrte, sont un peu faibles en comparaison de celles des orifices minces, et il donne pour rapport exact des dépenses naturelles, à celles des tuyaux additionnels, celui de 16 à 13. Nous ferons donc $724 - K = 478$; et, au pis aller, la différence de $\sqrt{478}$ à $\sqrt{470}$ n'est que d'environ $\frac{1}{135}$, dont pourraient différer les vîtesses calculées d'après ces deux valeurs.

Il est très-difficile de rendre compte pourquoi un tuyau additionnel, de quelques pouces de longueur, oblige la veine fluide à suivre sa paroi, et augmente la dépense que faisait l'orifice mince dans le rapport de 10 à 13 : il faut pour cela que la déviation des filets se fasse dans un ordre différent. Il paraît néanmoins constant que la vîtesse, qui a lieu dans l'axe du tuyau, reste la même qu'auparavant, c'est-à-dire, qu'elle est toujours due à toute la hauteur de la charge, ainsi que nous l'avons vérifié par l'expérience.

M. le chevalier de Borda a observé (Mém. de l'Acad. an. 1766) que l'eau passant par un tuyau additionnel, dont le bout pénetre dans le réservoir, et est entouré d'eau de toute part, y éprouve

plus de contraction que lorsque l'entrée du tuyau est dans le plan de la paroi du réservoir, ou qu'elle est entourée d'un plateau. Cela vient, sans doute, de ce que la déviation des filets est plus grande, parce que le bout du tuyau est isolé : la quantité 724—K y est égale à 336, quand l'eau suit les parois.

Si, outre cela, l'eau ne suivait pas la paroi du même tuyau additionnel isolé, la contraction y serait encore plus grande que celle qui a lieu dans les autres orifices percés dans une mince paroi, et 724—K se trouve égal à 191.

En général, puisque la vîtesse est égale à $\sqrt{724-K}\sqrt{h}$, on a $h = \frac{V^2}{724-K}$; ainsi la charge nécessaire pour imprimer à l'eau une vîtesse quelconque V, en passant par un orifice isolé, percé dans une *mince paroi*, *est égale à* $\frac{V^2}{278}$*: celle* qui serait nécessaire pour imprimer la même vîtesse par un tuyau additionnel ordinaire est égale à $\frac{V^2}{478}$.

Mais si par la situation de l'orifice, ou par la forme du réservoir, l'eau se dirige mieux vers l'orifice, la contraction deviendra moindre à mesure que les obstacles, qui obligent les filets de se détourner, seront moindres. Ainsi, par exemple, un orifice quarré ou même circulaire, placé dans l'angle inférieur du réservoir, sera plus favorable à l'écoulement que celui qui serait au bas et au milieu d'une de ses faces verticales, ou au milieu d'un des côtés de son fond; et ceux-

ci donneront à leur tour moins de contraction que ceux qui sont isolés, c'est-à-dire, un peu distants des autres côtés du réservoir. On pourrait distinguer ces divers degrés de contraction par des noms différents, comme *contraction environnante*, *contractions latérales*, *contraction supérieure*, *contraction inférieure*.

10. Quand on donne à un tuyau additionnel une longueur plus grande qu'environ trois à quatre fois son diametre, l'eau éprouve, pour s'y mouvoir, un frottement qui commence à faire diminuer les dépenses, et l'ordre des vîtesses de l'axe à la circonférence, n'est plus le même qu'auparavant; mais la charge nécessaire pour imprimer à l'eau la vîtesse moyenne avec laquelle elle s'écoule, est toujours égale à $\frac{V^2}{478}$, quand même la longueur du tuyau deviendrait très-grande, parce que la déviation des filets est semblable pour de petites vîtesses comme pour les grandes.

11. La troisieme espece de contraction d'orifice est celle qui a lieu à l'entrée des longs tuyaux, ou du lit des canaux ouverts, dont la section est constante, et la longueur assez grande pour que le mouvement y devienne uniforme. Pour les tuyaux, cette contraction est la même qu'aux tuyaux additionnels, comme je viens de le dire, quant à la déviation des filets, mais non quant à la diminution de la dépense et de la vîtesse moyenne de l'écoulement, qui dépendent ici de deux causes; la contraction d'orifice à l'entrée du tuyau, et le frottement intérieur dans le tuyau. Ce sont

deux résistances absolument distinctes, que le poids de la charge doit vaincre : la premierè est toujours proportionnelle au quarré de la vîtesse, et exprimée, comme je viens de le dire, par $\frac{V^2}{478}$; la seconde dépend non-seulement de cette vîtesse, mais de plusieurs autres causes dont nous parlerons bientôt.

Quant aux canaux, si le fond de leur entrée est de niveau avec le fond du réservoir d'où ils tirent leur eau, il n'y a aucune contraction inférieure ; si l'eau passe sans obstacle de la surface du réservoir dans le canal, elle prend d'elle-même la chûte qui lui convient, au moyen d'une pente qui n'est point l'effet d'une contraction supérieure : restent donc les contractions latérales qui sont bien sensibles, sur-tout quand la vîtesse est un peu grande. Nous avons remarqué à l'entrée d'un canal rectangulaire de 18 pouces de largeur, incliné de $\frac{1}{200}$, que l'eau qui y entrait sur une hauteur de réservoir de 8 à 9 pouces, après avoir glissé sur les deux arêtes verticales de l'entrée, se détachait entièrement des parois, jusqu'à la distance d'environ 20 lignes, et qu'elle s'en rapprochait ensuite pour les rejoindre un peu en-dessous. La surface latérale et concave de cette veine contractée était verticale, et laissait voir à sec le fond du canal entre elle et la paroi. Cet effet n'avait lieu, à la vérité, que parce que la vîtesse de l'eau était fort grande ; quand elle devenait moindre, ce vide latéral était rempli par une eau stagnante ou tournoyante ; et dans les plus petites vîtesses,

on remarquait toujours une contraction qui se rendait sensible par l'irrégularité de l'écoulement vers chaque angle de l'entrée.

Le canal, sous la forme d'un trapèze, donnait lieu à une contraction beaucoup moindre, et la raison en est sensible ; car sa section s'évasant beaucoup par le haut, il dépensait davantage à sa surface que le canal rectangulaire ; et n'y ayant point non plus de contraction supérieure, celle des côtés était diminuée aussi par le poids même de l'eau qui remplissait le vide inférieur qui tendait à s'y former. Quoi qu'il en soit, nous avons trouvé que la valeur de 724—K variait dans ces expériences, depuis 530 jusqu'à 660. Mais il est probable que si notre canal eût été beaucoup plus large, la contraction, qui ne peut être que latérale, aurait été d'autant moindre, que la somme des parois latérales aurait été plus petite que celle des largeurs du fond et de la surface.

Il paraît donc que, dans la pratique, quand la vîtesse de l'eau est bornée, et la largeur d'un canal considérable en proportion de sa profondeur, la contraction d'orifice est très-peu sensible. Nous aurons occasion de revenir sur cet article dans la suite.

12. Enfin, la quatrieme espece de contraction est celle qui diminue la dépense des reversoirs. On en peut distinguer deux sortes. Les reversoirs peuvent être placés immédiatement dans une face d'un réservoir, ou être employés à barrer le cours d'une riviere ou d'un canal, comme sont les écluses

sur les rivieres navigables de la Flandre. Dans les premiers, la contraction latérale peut être sensible; dans les autres, elle se trouve d'autant plus diminuée, que le rapport de la largeur du canal à celle du reversoir sera moindre; et enfin elle devient nulle, lorsque ces deux largeurs sont égales. Mais la contraction inférieure a lieu dans ces deux sortes de reversoirs, parce que leur seuil est toujours plus haut que le fond du réservoir. La partie supérieure n'éprouve aucune contraction; car chaque filet supérieur a une vîtesse réelle, due entièrement à sa chûte depuis la superficie du réservoir.

Dans la premiere espece de reversoirs, nous avons trouvé 724—K égal à environ 680; et dans la seconde, à peu près à 700. Il y a lieu de croire que cette quantité se rapprocherait encore plus de 724, dans des reversoirs ordinaires.

13. On voit, d'après ces observations, que nous sommes bien loin de pouvoir calculer avec précision les effets de la contraction dans tous les cas; car il y a une variété infinie dans la disposition des orifices, sans parler de la contraction occasionnée par les piles d'un pont, ou par une vanne à demi-levée, sous laquelle on force l'eau de passer avec une certaine charge. Mais il était nécessaire de donner sur cette matiere des notions un peu étendues, sans lesquelles nous aurions eu de la peine à exposer avec clarté ce que nous avons à dire sur le mouvement uniforme.

CHAPITRE II.

Principe du mouvement uniforme; similitude entre les tuyaux de conduite et le lit des rivieres; formule primitive du mouvement de l'eau dans un lit quelconque.

14. Nous nous proposons d'examiner, dans le courant de cette premiere partie, les lois que suit l'eau, en vertu de sa fluidité, pour couler dans le lit des rivieres, des canaux et des tuyaux, en considérant sur-tout les vîtesses qu'elle y acquiert, à raison de sa pente et des dimensions du lit qui la renferme. Cette matiere a été si peu approfondie jusqu'à présent, malgré l'utilité dont doit être une théorie exacte sur cette partie de l'Hydraulique, qu'elle peut passer pour neuve. On n'a tout au plus qu'effleuré les notions les plus communes sur le cours des eaux; et il se commet tous les jours des fautes très-graves en ce genre, par une suite naturelle de l'ignorance où sont bien des personnes qui manient les eaux, des principes d'une science qui intéresse tant le bien de la société. Cependant nos erreurs sont, en cette matiere, d'une toute autre conséquence que dans les objets de goût, de luxe ou d'agrément; parce que toujours il en résulte, ou un dommage réel, ou la perte de quelque avantage précieux.

15. Le mouvement de l'eau qui coule, dans le

lit d'un fleuve, pour s'aller jeter dans la mer, est dû à deux causes : 1° à l'action de la pesanteur, qui oblige les corps à descendre sans cesse, quand aucun obstacle ne les arrête; 2° à la mobilité des parties de l'eau, qui leur fait prendre un niveau parfait dans les vaisseaux clos, ou les détermine à s'écouler du côté où elles éprouvent moins de résistance. En effet, si l'on imagine un élément de l'eau, une molécule primitive, pressée de tous côtés par les autres éléments voisins qui l'entourent dans un vaisseau fermé, la pression qu'elle éprouve étant égale de toutes parts, elle doit demeurer en repos : mais si la surface de l'eau n'est pas de niveau, et qu'elle baisse d'un côté, comme cela arrive dans le courant d'un fleuve, la différence de hauteur qui se trouve entre la colonne d'eau qui pousse cet élément par derriere, et celle qui tend à l'appuyer pardevant, est la force qui oblige l'élément à se mouvoir du côté où la pression est moindre; et il obéit à cet effort avec beaucoup de facilité, à cause de l'extrême mobilité des parties de l'eau. On voit par-là que tous les éléments situés à différentes profondeurs, sont poussés avec une égale force dans la direction du courant, et qu'ils doivent par conséquent tendre à se mouvoir avec des vîtesses égales, depuis la surface jusqu'au fond.

Pour rendre cette vérité plus sensible, supposons que toute la masse de l'eau, contenue dans le lit d'une riviere, devienne immobile par la congélation, en conservant néanmoins la pente

qu'elle avait à sa surface ; si tout-à-coup elle reprend sa fluidité, les molécules situées au fond ou vers le milieu de la profondeur, ne seront pas plus pressées, dans le sens où le fluide pèut se mouvoir, que celles de la surface. Une tranche transversale de la riviere occupant, par exemple, un pouce de longueur à sa surface, éprouvera une force accélératrice qui sera à la gravité, comme la différence de niveau de l'amont à l'aval est à un pouce ; et le mouvement sera uniquement produit par la pente qui se trouve à la surface du fluide, sans dépendre de la pente plus ou moins grande, plus ou moins réguliere que peut avoir le fond du lit.

Nous établirons donc pour premier principe, *que la force motrice de chacune des molécules d'eau qui composent une riviere, provient simplement de la pente qu'elle acquiert à sa surface.*

16. La pente d'une riviere, ainsi que celle d'un plan incliné, est la différence de niveau qui se trouve entre deux points qui sont joints par une ligne droite, dont la longueur est connue : elle doit s'exprimer par la hauteur du plan, divisée par sa longueur. Dans l'expression de la pente des rivieres, on confond ordinairement la base du plan incliné avec sa longueur, parce que ces deux lignes sont sensiblement égales entre elles. Nous avertissons donc ici que, quand nous parlerons de la pente des eaux courantes, nous entendrons ordinairement celle qui se prend à la surface de l'eau, et non celle du fond du lit : car, quoiqu'il

soit assez commun que celle-ci soit parallele à la premiere, il peut néanmoins aussi s'y rencontrer des contrepentes et des inégalités qui sortent de la regle ordinaire, et qui ne sont point pour le présent l'objet de nos recherches. Cette maniere de prendre les pentes de l'eau, est d'autant plus raisonnable, qu'un canal peut avoir beaucoup de pente sur la longueur du fond de son lit, tandis qu'il est de niveau à sa surface ; et dans ce cas, l'eau n'y a aucun mouvement.

17. Nous appellerons *section du lit d'une riviere, d'un canal ou d'un tuyau*, le plan perpendiculaire à la direction du courant qui représente l'aire ou la coupe de la veine fluide qui est en mouvement ; et la *paroi* de cette *section* est le contour développé de cette section qui représente le profil du lit solide, dans lequel l'eau se meut. Ainsi la section du courant est un plan, la paroi de la section est une ligne. Mais quand nous dirons *la paroi d'un tuyau*, ou *la paroi d'un lit*, nous entendrons par ces expressions la surface intérieure d'un tuyau ou d'un lit qui est mouillée ou baignée par le fluide.

18. La pesanteur spécifique des liquides est indifférente pour leur mouvement, si on fait abstraction de la résistance que le lit oppose à leur descente. On sait que l'eau tombe aussi vîte dans le vide que le mercure, qui pese 14 fois autant. Mais il n'en est pas de même de la gravité : comme celle-ci est la cause réelle et immédiate de la chûte des corps, si elle vient à augmenter, la chûte, qui est son effet, devient aussi plus

grande dans le même temps ; et le contraire arrive, si elle vient à diminuer. On pourrait dire, par cette raison, que les fleuves coulent plus vîte vers les pôles que sous l'équateur, parce que la gravité y est plus grande ; mais cet avantage est compensé par le froid, qui y ôte à l'eau une partie de sa fluidité, ainsi que nous l'avons éprouvé.

19. Si l'eau n'éprouvait aucune résistance de la part du lit dans lequel elle coule, si l'attraction des parois de son lit était nulle, si sa fluidité enfin était parfaite, sa force accélératrice, c'est-à-dire, sa pesanteur relative accélérerait continuellement son mouvement et précipiterait son cours, à la maniere des corps graves, qui tombent librement; c'est-à-dire, qu'elle acquerrait sans cesse de nouveaux degrés de vîtesse. Par-là, la terre et ses habitans se trouveraient privés de tous les secours que nous tirons des eaux courantes; elles s'écouleraient si promptement, que la surface de nos campagnes, desséchée aussi-tôt qu'arrosée, deviendrait inhabitable. La ténacité d'aucun sol ne pourrait résister à la violence des torrents, et la force accélératrice deviendrait un agent destructeur, si, par une providence bienfaisante, la résistance du lit et la viscosité de l'eau, n'étaient un frein qui la contient et met des bornes à sa rapidité. Ainsi le frottement contre les bords, qui, par l'effet de la viscosité, se communique à toute la masse, et l'adhérence même que les molécules ont entre elles et avec les parois, sont des causes de résistance qui sont relatives aux

vîtesses : de sorte que la résistance augmentant à mesure que les vîtesses deviennent plus grandes, elle doit parvenir à égaler la force accélératrice ; alors la vîtesse acquise se maintient et reste uniforme, sans pouvoir acquérir de nouveaux degrés, à moins qu'il ne survienne quelque changement dans la pente ou dans l'ouverture du lit.

20. Delà suit ce deuxieme principe, ou plutôt cet axiome, *que quand l'eau se meut uniformément, la résistance qu'elle éprouve est égale à sa force accélératrice.*

21. De même que dans la Théorie des écoulements par des orifices, on considere l'aire de l'orifice, sa dépense et sa charge, et qu'on déduit de l'expérience la valeur de la vîtesse moyenne de l'eau à l'orifice ; nous considérerons aussi, dans la Théorie du mouvement uniforme, la section, la dépense et la pente d'un lit ; et nous déterminerons, par le secours de l'expérience, quelle est la vîtesse moyenne qui répond à cette dépense ; et qui est produite par les deux autres données. Nous définissons cette vîtesse moyenne, en disant que c'est une vîtesse imaginaire, ou qui n'existe souvent qu'en un lieu de la section qu'on ne peut déterminer ; qui est moindre que les plus grandes vîtesses des filets du courant, plus grande d'ailleurs que les plus petites, et telle enfin que, si on la multiplie par la section, on trouve un produit égal à la dépense du courant, c'est-à-dire, à la masse d'eau qui s'est écoulée pendant un temps déterminé.

Mais comme on a besoin, dans ces sortes de recherches, d'une très-grande précision, et que, d'un autre côté, les expériences sur les rivieres et les canaux sont peu susceptibles d'assez d'exactitude pour qu'on puisse s'assurer de bien mesurer leur dépense, il nous a été extrêmement avantageux de rapporter la théorie du mouvement uniforme, aux observations faites, le plus souvent, sur des tuyaux de conduite, dont la dépense, la charge et la section, se peuvent mesurer avec toute la précision qu'on peut desirer. Ainsi il faut commencer par montrer la parfaite analogie qu'il y a entre un lit de riviere et un tuyau horizontal ou incliné.

Fig. 1. 22. Soit AB un tuyau horizontal dont AD est la charge entiere. Cette charge est une force motrice qui peut être considérée comme divisée en deux parties; l'une employée à imprimer la vîtesse, l'autre à vaincre la résistance qui naît du mouvement dans toute la longueur du tuyau. Or, il n'y a qu'une seule combinaison, un seul partage qui puisse satisfaire à cette condition. Supposons que E soit le point de partage; de sorte que DE étant la hauteur de charge nécessaire pour imprimer à l'eau la vîtesse moyenne quelconque uniforme, avec laquelle elle doit couler (charge relative à la contraction d'orifice qui a qui a lieu en A) le reste EA soit la partie de la charge qui fait équilibre à la résistance. Dans cette supposition, si on adapte au point E un tuyau de même longueur et de même diametre que le premier, et qu'on

l'incline jusqu'à ce que l'extrémité inférieure de son axe rencontre l'axe du tuyau AB, en un point quelconque C, je dis que les vîtesses seront égales dans les deux tuyaux, et qu'ils auront la même dépense : car la force motrice, dans le tuyau incliné, est composée des poids de la colonne DE et de la colonne EC. Mais en décomposant ce dernier, on voit qu'une partie est détruite par la résistance du plan incliné, et qu'il ne reste qu'un poids égal à EA, qui pousse la colonne dans la direction EC. Tout est donc égal dans les deux tuyaux, forces motrices, longueurs, diametres; il faut bien qu'il en résulte même vîtesse et même résistance.

Le tuyau EC a de plus une propriété particuliere ; c'est que le poids relatif, ou la force accélératrice d'une tranche quelconque de la veine fluide qu'il contient, *est égal et fait équilibre à* la résistance de cette même tranche : car la résistance sur la longueur EK est vaincue par le poids relatif de la colonne EK, comme celle sur la longueur EC est vaincue par le poids de la colonne EC. On peut donc raccourcir ce tuyau ou l'alonger à l'infini, sans faire varier la vîtesse, tant que la charge DE restera la même.

Si, en laissant la charge constante, on alongeait le tuyau horizontal jusqu'en G, il faudrait que la vîtesse diminuât, pour que la charge fût encore capable de vaincre la résistance augmentée par cet alongement : la division se ferait en un point quelconque I, ensorte que DI serait la chûte

due à la nouvelle vîtesse, et IA le reste de la charge employée à vaincre la résistance; tellement que le mouvement de l'eau de ce tuyau se rapporterait à celui d'un autre tuyau incliné IH, de même longueur.

23. Ce que nous venons de dire d'un tuyau horizontal peut s'appliquer à tout tuyau incliné
Fig. 2. AB, tel que ceux de la figure 2. En tirant l'horizontale CB, on voit que DC est la charge entiere, ou la hauteur du réservoir; et si DE est la hauteur due à la vîtesse, le tuyau EF, de même longueur que le précédent, aura aussi la même vîtesse.

Ainsi le mouvement, dans tout tuyau horizontal ou incliné, peut être rapporté à celui d'un autre tuyau incliné, dont la charge, au-dessus de la prise d'eau, est égale à la hauteur due à la vîtesse dans le tuyau. Or, dans ce cas, la force accélératrice est égale à la résistance. Donc on peut considérer ce dernier tuyau comme une riviere, dont la pente et le lit sont constants.

24. On peut encore conclure de ce qui précede que, abstraction faite de la charge due à la vîtesse, un même tuyau incliné de quelque longueur qu'il soit, aura des vîtesses uniformes, relatives à toutes les inclinaisons qu'on peut lui donner; c'est-à-dire, qu'à chaque inclinaison différente répondra une vîtesse uniforme, qui croîtra toujours à mesure que l'inclinaison augmentera, jusqu'à ce que le tuyau étant devenu vertical, et sa pente ne pouvant plus augmenter, la vîtesse relative à la

seule pente soit parvenue au plus grand degré qui convienne à ce tuyau.

On voit à présent combien il nous a été avantageux de considérer, sous ce point de vue, le mouvement de l'eau dans un lit quelconque : car on peut pousser jusqu'au scrupule l'exactitude dont sont susceptibles les expériences faites sur des tuyaux de conduite ; la dépense en peut être facilement mesurée, et on en déduit la vîtesse moyenne exacte. Ainsi, ayant ajouté aux expériences de M. l'abbé Bossut, celles de plusieurs tuyaux d'un moindre diametre, et les ayant comparées à celles d'un canal factice, d'un grand canal et d'une riviere assez considérable, nous avons eu une suite très-étendue de vîtesses, depuis les pentes et les sections les plus petites, jusqu'aux plus grandes.

25. Dans tous nos calculs, nous avons pris le pouce pour l'unité de longueur, et la seconde pour l'unité de temps. La pente est toujours exprimée par la fraction $\frac{1}{b}$, en supposant, que, sur la longueur b, il y ait un pouce de différence de niveau. Ainsi la pente d'une riviere qui aurait un pouce et demi de pente, par exemple, sur 120 toises de longueur, qui valent 8640 pouces, serait exprimée par $\frac{1,5}{8640} = \frac{1}{5760}$: mais s'il s'agit d'un tuyau de conduite dont on connaît la longueur, et la hauteur de réservoir (*) ou la charge entiere, il

(*) Si l'entrée d'un tuyau se trouve abaissée d'une hauteur quelconque, au-dessous du niveau de l'eau du bassin d'où il

faudra, pour avoir sa pente, commencer par retrancher de la hauteur du réservoir la chûte due à sa vîtesse réelle, qui est égale, à cause de la contraction (9) à $\frac{V^2}{478}$, et considérer le reste de la hauteur du réservoir comme une pente répartie sur toute sa longueur. Le quotient de cette longueur, divisée par ce reste, sera la valeur de *b*.

En général, la pente exprime le rapport qu'il y a entre le poids absolu de la colonne d'eau employée à vaincre la résistance, et celui de la colonne de même diametre qui se meut. Ainsi, dans toute pente uniforme, la résistance qu'éprouve une colonne d'eau d'une longueur quelconque, est égale au produit du poids absolu de cette colonne, multiplié par la pente.

26. Avant que les observations nous eussent fait connaître le rapport des résistances aux vîtesses, nous avons dû supposer que les résistances croissaient comme le quarré des vîtesses, et qu'elles sont par conséquent égales à $\frac{V^2}{m}$, en nommant *m* une quantité constante ; et, en effet, il est bien

prend son eau, et que ce bassin ait une capacité qui soit en grand rapport avec le diametre du tuyau, on donne à la hauteur qui se trouve depuis la surface de l'eau jusqu'au centre de l'orifice du tuyau, le nom de *charge ;* mais si le tuyau, outre la charge d'eau au-dessus du centre de son orifice, a encore sur sa longueur une pente uniforme ou irréguliere, on désigne en général, sous le nom de *hauteur de réservoir*, la différence de niveau qui se trouve entre la surface de l'eau du bassin supérieur et l'extrémité inférieure du tuyau de conduite.

des cas où cette hypothese ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité. Si g exprime la vîtesse acquise par un grave à la fin d'une seconde, $\frac{g}{b}$ sera la force accélératrice relative à la pente $\frac{1}{b}$: ainsi, d'après le principe fondamental (20), on aura $\frac{V^2}{m} = \frac{g}{b}$, et $V\sqrt{b} = \sqrt{mg}$: c'est-à-dire, que, dans un même lit, le produit de la vîtesse, par l'inverse de la racine quarrée de la pente, doit être une quantité constante. Donc, en faisant abstraction de toutes les forces auxquelles les molécules de l'eau peuvent être assujéties, la formule primitive de toutes les vîtesses uniformes d'un même lit est $V = \frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{b}}$.

Nous allons confronter avec l'expérience, dans le chapitre suivant, l'équation fondamentale $V\sqrt{b} = \sqrt{mg}$, et en faire l'application à différents lits.

CHAPITRE III.

L'expérience prouve que les résistances d'un même lit croissent en moindre raison que le quarré des vîtesses : comment la grandeur et la figure du lit influe sur les vîtesses.

27. QUAND nous avons comparé, avec un grand nombre d'expériences, le résultat $V\sqrt{b} = \sqrt{mg}$, nous avons reconnu que les valeurs de $V\sqrt{b}$, quoique prises dans un même lit, ne sont pas

exactement constantes, mais qu'elles croissent un peu, à mesure que les vîtesses augmentent. Nous avons été obligés d'en conclure que *les résistances sont en moindre raison que le quarré des vîtesses*, ou que les vîtesses augmentent plus que les racines des pentes ; tellement que $\sqrt{b}$ ne doit pas être employé dans toute l'intégrité de sa valeur ; mais il doit être diminué d'une quantité qui soit, avec la racine de l'inverse de la pente, en rapport d'autant plus grand, que cette racine est plus grande. Ce n'est pas encore ici le lieu de rendre compte des recherches qui nous ont conduits à déterminer la fonction de la pente qui concourt à rendre $\sqrt{mg}$ constante ; nous les réservons pour le chapitre cinquieme : mais il suffira, pour mettre de l'ordre et de la clarté dans l'exposition de cette théorie, de dire, par anticipation, que cette fonction est exprimée dans presque tous les cas par $\sqrt{b}$—L. $\sqrt{b+1,6}$, en employant les logarithmes hyperboliques. Pour le présent, nous appellerons X cette fonction, en faisant VX$=$ $\sqrt{mg}$, quantité constante pour un même lit. Le tableau suivant fait voir qu'en effet cette quantité est constante dans les expériences qui ne varient que par les pentes ; mais qu'elle est variable quand les lits sont différents. Ce tableau est extrait de celui que nous donnerons plus bas, (§ 55) pour comparer les résultats de l'expérience et de la théorie, et ne présente, pour éviter d'être diffus, qu'un abrégé des principales observations faites sur les pentes et les lits variés, qui ont été soumis à l'expérience.

TABLEAU *des valeurs de* VX *ou* $\sqrt{mg}$, *constantes pour un même lit; et variables, quand les lits sont différents.*

Numéros des expériences tirées du tableau du par. 55.	Valeurs de b, ou inverses des pentes.	Valeurs de X ou de $\sqrt{b} - \mathrm{L}.\sqrt{b+1,6}$.	Vitesses moyennes tirées de l'expérience.	Valeurs de VX, d'après l'expérience.	Valeurs moyennes de VX.
Tuyaux d'une ligne et demie de diametre.					
			po.	po.	po.
6	1,07805	0,54633	41,614	22,7	22,85
9	7,03597	1,57580	14,642	23,0	
Tuyaux de deux lignes de diametre.					
15	1,29174	0,60620	51,151	31,0	31,1
19	20,01636	2,93900	10,620	31,2	
Tuyaux de 2 lignes et 9 dixiemes de diametre.					
26	1,21569	0,58558	73,811	43,2	43,3
30	6,45035	1,49808	28,658	42,9	
36	21,66390	3,08277	14,295	44,0	
Tuyaux d'un pouce de diametre.					
39	5,65026	1,38713	84,945	117,8	118,8
42	10,78798	2,02756	58,310	118,2	
47	64,15725	5,9192	19,991	117,8	
51	132,16170	9,0509	13,315	120,5	
57	54,5966	5,3768	22,282	119,8	
Tuyaux de seize lignes de diametre.					
61	37,0828	4,2639	33,160	141,4	141,4
64	66,3020	6,0360	23,360	141,0	
68	125,6007	8,7870	16,128	141,7	

Numéros des expériences tirées du tableau du par. 55.	Valeurs de b, ou inverses des pentes.	Valeurs de X ou de $\frac{\sqrt{b} - L.}{\sqrt{b+1,6.}}$	Vitesses moyennes tirées de l'expérience.	Valeurs de VX, d'après l'expérience.	Valeurs moyennes de VX.
Tuyaux de 2 pouces et un centieme de diametre.					
			po.	po.	po.
71	21,47087	3,0661	58,903	810,6	
76	70,14263	6,2410	29,215	812,4	181,6
82	188,5179	11,1093	16,377	811,8	
Canal trapeze de 18po., 84 *de section, et* 13po., 06 *de paroi.*					
90	212,0	11,882	27,51	326,8	326,8
Canal rectangulaire de 51po., 75 *de section, et* 23po., 25 *de paroi.*					
111	1412,0	33,9537	12,10	411,0	411,0
Canal rectangulaire de 105po., 78 *de section, et* 29po., 17 *de paroi.*					
113	1412,0	33,9537	15,11	513,3	513,3
Canal trapeze de 119po., 58 *de section, et* 31po., 06 *de paroi.*					
99	432,0	17,752	30,16	535,4	535,4
Tuyau de dix-huit pouces de diametre.					
89	304,97	14,604	39,159	571,0	571,0
Grand canal de 10475 *pouces de section, et* 360 *pouces de paroi.*					
118	15360,	119,12	12,25	1459,0	1459,0
Riviere de 30905 *pouces de section, et* 567 *pouces de paroi.*					
124	32951,	176,33	10,42	1837,0	1837,0

28. On voit par ce tableau que la pente n'influe point sur la valeur de VX ou de son égale $\sqrt{mg}$; mais que cette quantité devient de plus en plus grande, à mesure que les lits augmentent; et cet effet est une suite du frottement, car la résistance que l'eau éprouve à chaque section transversale du lit, ne peut être produite que par les parois qui la contiennent : ainsi, par exemple, si la vîtesse, la pente et la section restent les mêmes, la résistance sera d'autant plus grande que la paroi augmentera en vertu de la figure du lit; et au contraire, si, toutes choses égales d'ailleurs, la section vient à augmenter, la résistance de chaque molécule deviendra d'autant moindre, que la résistance totale aura à se partager sur un plus grand nombre d'éléments. En un mot, il est clair que la *résistance de chaque molécule est en raison directe de la paroi, et inverse de la section*. Ainsi, dans l'expression de la résistance, $\frac{V^2}{m}$, la quantité m ne peut être constante que pour un même lit; mais elle doit varier, pour les lits différents, dans le rapport de la section à la paroi, puisque la résistance diminue à mesure que ce rapport augmente.

29. Dans un lit régulier, comme est celui des tuyaux de conduite, la section est l'aire d'un cercle, la paroi est une circonférence, et le quotient de l'une divisé par l'autre est toujours égal à la moitié du rayon, ou au quart du diametre. Dans les lits irréguliers, ce quotient est encore

une ligne, qui, étant multipliée par le périmetre d'un lit, donne une surface égale à celle de ce lit. Nous nommerons en général cette ligne *rayon moyen* ou *r*.

30. On voit donc que, puisque m doit être proportionnelle à r, la quantité $\sqrt{mg}$ doit être en raison de $\sqrt{r}$, pour des lits différents, et que $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}}$ devrait être une quantité constante dans tous les cas. C'est ce que nous allons examiner, au moyen du tableau suivant, dans lequel la premiere colonne exprime les diametres des tuyaux, ou la section et la paroi des autres lits; la seconde, la valeur de la racine quarrée du rayon moyen; la troisieme, les valeurs de VX ou $\sqrt{mg}$, trouvées par l'expérience dans le tableau précédent; et la quatrieme, les valeurs de $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}}$.

DIAMETRE DES TUYAUX, ou section et paroi des lits.	VALEURS de $\sqrt{r}$.	VALEURS moyennes de VX, ou $\sqrt{mg}$, selon l'expérience.	VALEURS de $\frac{VX}{\sqrt{r}}$ ou de $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}}$.
po. li.			
Diam. 0 1,5	0,17677	22,85	129
Diam. 0 2,0	0,2041	31,1	152
Diam. 0 2,9	0,2458	43,3	176
Diam. 1 0	0,5000	118,8	237
Diam. 1 4	0,57735	141,4	245
Diam. 2,01	0,7089	181,6	256
po. po.			
Sect. 18,84 Par. 13,06	1,20107	326,8	272
Sect. 51,75 Par. 23,25	1,49191	411,0	275
Sect. 105,78 Par. 29,17	1,90427	513,3	270
Sect. 119,58 Par. 31,06	1,96219	535,4	272
po. li.			
Diam. 18 0	2,121	571,0	269
po. po.			
Sect. 10475 Par. 360	5,394	1459,0	269
Sect. 30903 Par. 567	7,376	1837	249

31. Il est aisé de remarquer, d'après ce tableau, que les quantités $\sqrt{mg}$ ne sont point proportionnelles à $\sqrt{r}$, ni à aucune puissance de r, mais qu'elles augmentent de moins en moins à mesure que $\sqrt{r}$ devient plus grand. Ce n'est que dans de très-grands lits que $\sqrt{mg}$ devient sensiblement proportionnelle à $\sqrt{r}$, tandis que dans les petits la vîtesse diminue beaucoup plus que les valeurs

3.

de $\sqrt{r}$. Cet effet paraît être dû à une cause fort simple, qui est l'adhésion de l'eau à la paroi. On sait que l'eau éprouve, de la part des corps solides, une attraction qui s'étend à une certaine distance assez constante : j'ai éprouvé qu'une surface de fer-blanc de 23 pouces quarrés a enlevé, avant que de se séparer de l'eau, un poids d'eau de 1601 grains ; c'est 70 grains par pouce quarré, ou une hauteur d'eau de 0po., 1877. Une autre surface de 5 po., 63 quarrés a enlevé de même un poids d'eau de 365 grains : c'est 64,83 grains par pouce quarré, ou une hauteur d'eau de 0po., 173. Ainsi, l'attraction d'une semblable paroi équivaut au moins au poids de deux lignes de hauteur d'eau. Or, cet effet répond à celui d'un retrécissement de lit, qui, en diminuant davantage la section que la paroi, occasionne aussi sur le rayon moyen une diminution beaucoup plus sensible dans les petits lits que dans les grands. Pour représenter cet effet d'une maniere analytique, nous avons essayé de retrancher de $\sqrt{r}$ une quantité constante et homogene, et nous avons trouvé qu'en effet $\sqrt{mg}$ est proportionnel à $\sqrt{r} - 0{,}1$; ou, ce qui est la même chose, $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}-0{,}1}$ est une quantité constante et égale à VX. On en jugera par le tableau suivant.

DIAMETRE DES TUYAUX ou section et paroi du lit.	VALEURS de $\sqrt{r}-0,1$.	VALEURS de XV, ou $\sqrt{mg}$ selon l'expérience	VALEURS de VX $\frac{}{\sqrt{r}-0,1}$ ou de $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}-0,1}$.
po. li.			
Diam. 0 1,5	0,07677	22,85	297
Diam. 0 2,0	0,1041	31,1	298
Diam. 0 2,9	0,1458	43,3	297
Diam. 1 0	0,4000	118,8	297
Diam. 1 4	0.47735	141,4	296
Diam. 2,01	0,6089	181,6	298
po. po.			
Sect. 18,84 Par. 13,06	1,10107	326,8	297
Sect. 51,75 Par. 23,25	1,39191	411,0	295
Sect. 105,78 Par. 29,17	1,80427	513,3	284
Sect. 119,58 Par. 31,06	1,86219	535,4	287
po. li.			
Diam. 18 0	2,021	571,0	282
po. po.			
Sect, 10475 Par. 360	5,294	1459,0	275
Sect. 30905 Par. 567	7,276	1837,0	252

32. On voit donc que les valeurs de $\sqrt{mg}$, ou les vîtesses à même pente, dans des lits différents, sont proportionnelles aux valeurs de $\sqrt{r}-0,1$, sur-tout en ayant égard à l'effet de la viscosité, que nous discuterons dans la suite; effet presque insensible dans les petits lits, mais qui devient assez considérable dans les grands; parce qui'l est proportionnel aux masses fluides en mouve-

ment. Voilà ce qui rend très-intéressantes les expériences sur des tuyaux d'un très-petit diametre, dans lesquels on peut considérer comme nul l'effet de la viscosité, et prendre le nombre 297 pour la valeur générale de $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}-0,1}$.

33. Puisqu'on a $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}-0,1}=297$, on aura aussi $m=\frac{(297)^2}{g}(\sqrt{r}-0,1)^2=\frac{88209}{362}(\sqrt{r}-0,1)^2=243,7$ $(\sqrt{r}-0,1)^2$ que nous désignerons par $n(\sqrt{r}-0,1)^2$. Ainsi, lorsque nous avons exprimé (26) le frottement par $\frac{V^2}{m}$, la quantité m était variable, et sa valeur générale doit être $\frac{V^2}{n(\sqrt{r}-0,1)^2}$ dans laquelle n est une quantité abstraite, invariable, égale à 243,7, donnée par la nature de la résistance que l'eau éprouve entre ses parois, et qui en indique l'intensité

Enfin, puisque $m=n(\sqrt{r}-0,1)^2$ on a $\sqrt{mg}=\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)$, et l'expression de la vîtesse, ou la formule devient $V=\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{X}=\frac{297(\sqrt{r}-0,1)}{X}$. Nous allons à présent développer les recherches qui nous ont amenés à connaître la valeur de X.

CHAPITRE IV.

Considérations générales sur la nature de la résistance causée par le frottement.

34. L'OPINION la plus probable sur la nature des molécules de l'eau, et la plus conforme aux propriétés de cet élément, est que ce sont de très-petites particules de matiere, parfaitement rondes, parfaitement dures, incompressibles par conséquent, et très-polies. Delà il résulte que, comme elles ne se touchent que par un seul point, aucune pression, si grande qu'elle soit, ne peut augmenter le contact de deux molécules, ni par conséquent influer sur l'énergie de leur frottement. Dans les masses solides, dont les parties friables peuvent se diviser et se comprimer, une grande pression augmente le nombre des points de contact. Nous ne nierons point que quelques expériences ont pu faire soupçonner une faible compression dans l'eau; mais en supposant qu'elle existe, l'effet en serait trop peu sensible pour en tenir compte. Il est donc certain que l'incompressibilité de l'eau, sinon absolue, du moins sensible, fait que ses molécules ont toujours la même facilité à se mouvoir, quelle que soit leur charge supérieure. Une expérience décisive à cet égard est celle que nous rapportons ci-après (363) de deux syphons de même diametre, et de même longueur développée d'eau, mais configurés de

maniere à produire des pressions très-différentes. On y voit qu'en imprimant à ces deux colonnes d'eau des vîtesses égales, les effets de la résistance sont égaux, et par conséquent restent indépendants de la pression.

Quoique ce principe ne soit pas conforme à l'opinion de quelques Physiciens, nous ne pouvons nous refuser à l'évidence de l'expérience, et nous établissons comme certain *que la résistance de l'eau est indépendante de la pression* : ainsi, les vîtesses dans différents lits, qui, avec des figures dissemblables ont des rayons moyens égaux, ne peuvent varier que par les pentes.

35. Mais si la résistance est indépendante de la pression, comment est-elle produite ? Voici quelques conjectures à cet égard qui ne répugnent ni au raisonnement ni à l'expérience, et qui paraissent admissibles, quoiqu'elles n'aient pas l'évidence d'une démonstration.

Lorsque l'eau coule sur des parois, elle les mouille, c'est-à-dire que ses molécules, attirées par ces parois, en pénetrent les pores, autant que leur ténuité le permet, en remplissent toutes les cavités, et forment une surface composée de globules contigus et immobiles, ou capables tout au plus de tourner sur eux-mêmes: cette surface, parfaitement unie par rapport à nos sens, ne l'est pas cependant, à beaucoup près, par rapport à d'autres molécules de la même grosseur que les premieres, qui ne peuvent glisser dessus, sans s'engager et se dégager successivement des inters-

tices résultants de la figure sphérique. Ainsi, les molécules qui touchent immédiatement celles qui sont collées à la paroi, étant considérablement retardées, alterent aussi le mouvement de celles qui les touchent ; et la résistance ou l'inertie du lit se communiquant ainsi de proche en proche, répand sa force coërcitive sur toute la masse. La viscosité, cet effet de l'attraction ou de l'adhésion qu'ont entre elles ces mêmes particules, concourt à augmenter cette résistance ; car, si les molécules les plus éloignées de la paroi tendent à aller plus vîte, elles ne peuvent le faire sans entraîner un peu celles qui avoisinent la paroi ; et si celles-ci sont retardées davantage par la paroi, elles retardent aussi un peu le mouvement des premieres, tellement qu'il résulte de toutes ces actions et réactions un mouvement moyen de toute la masse, dans laquelle la vîtesse des filets décroît à mesure qu'ils sont plus près de la paroi. Voyez les expériences des paragraphes 388, et suivants.

36. En considérant comment l'eau prépare elle-même la surface sur laquelle elle coule, on voit que la différence des matieres dont peut être composée la paroi, ne doit pas en apporter de bien sensible sur la résistance. Nous n'avons en effet trouvé aucune variation dans le frottement, qu'on pût rapporter à cette cause, dans les différents cas où l'eau coulait sur du verre, du plomb, de l'étain, du fer, du bois et différentes especes de terres.

37. Si on suppose un globule engagé entre deux

autres globules contigus et immobiles, l'effort nécessaire pour le dégager sera d'autant plus grand qu'on voudra le mouvoir plus vite : mais si cette molécule est forcée de se mouvoir sur une file de globules semblables, chaque résistance étant comme les vîtesses, et le nombre des obstacles augmentant encore dans le même rapport, il s'ensuit que les résistances totales doivent croître comme les quarrés des vîtesses. Cependant l'expérience nous apprend qu'elles n'augmentent pas exactement dans ce rapport, et qu'il en est ici à-peu-près comme du frottement des corps solides, où l'engrenage diminue à mesure que la vîtesse augmente. Dans les petites vîtesses, l'engrenage étant à-peu-près le même, les résistances sont sensiblement comme les quarrés des vîtesses. Dans les grandes comparées entre elles, le même rapport doit encore avoir lieu ; mais si l'on compare de petites vîtesses, où l'engrenage est complet, avec de très-grandes vîtesses, où les molécules ne s'engagent que très-peu, la résistance, dans le dernier cas, doit être presque nulle, en comparaison de la premiere, c'est-à-dire que la résistance doit être finie pour une vîtesse infiniment grande. Tout cela est assez conforme aux résultats de l'expérience. Dans les petites pentes les vîtesses sont sensiblement comme les racines quarrées de ces pentes, ou comme celles des résistances ; mais ce rapport s'éloigne d'autant plus de l'exactitude, que les vîtesses ou les pentes sont plus grandes.

Ainsi, dans la formule $V = \frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{X}$, qu'on peut réduire à $V = \frac{A}{X}$, én supposant le rayon moyen constant, X est sensiblement égal à $\sqrt{b}$, quand la pente est très-petite, ou b très-grand : mais pour représenter la vîtesse, à mesure que la pente augmente, il faut qu'on ait $X < \sqrt{b}$, et que $\frac{\sqrt{b}}{X}$ augmente d'autant plus que $\sqrt{b}$ diminue.

C'est d'après cette donnée que nous avons cherché à déterminer la valeur de la quantité X ; et pour parvenir à l'assujétir à la marche de la nature, il a fallu embrasser les effets, depuis les plus petites vîtesses, jusqu'aux plus grandes possibles : mais comme les lits ouverts ne peuvent pas être assez inclinés pour produire de très-grandes vîtesses, nous nous sommes principalement attachés à observer le mouvement de l'eau dans des tuyaux qu'on peut incliner jusqu'à la situation verticale. Dans ce cas, la pente $\frac{1}{b}$ est la même que $\frac{1}{1}$, et la vîtesse uniforme à toute longueur est la plus grande possible ; cependant on peut produire dans un tuyau des vîtesses encore plus grandes, en donnant une charge plus grande que celle qui répond à la vîtesse uniforme.

38. Soit le tuyau vertical AB, dont la charge CA est la hauteur due à la vîtesse ; le mouvement y sera uniforme, quelque longueur qu'on donne à ce tuyau ; la pente sera 1 ; et le poids total de la colonne qui se meut est la mesure de la résis-

tance. Dans ce cas, la valeur de $\frac{1}{b}$ considéré comme pente, est à son *maximum*, et b ne peut pas être moindre que l'unité : mais si on considere cette quantité comme le rapport du poids de la colonne qui est employée à vaincre la résistance, au poids de celle qui se meut, elle peut surpasser l'unité, et b devenir moindre que 1 : car si l'on augmente la charge jusqu'en E, sans changer la longueur du tuyau, la vîtesse augmentera ainsi que la résistance. Supposons que $EF > CA$ soit la hauteur due à la nouvelle vîtesse; alors FB, c'est-à-dire la colonne qui fait équilibre à la résistance, sera plus grande que celle qui se meut; et tandis que $\frac{1}{b} = \frac{FB}{BA}$ est plus grand que l'unité, b au contraire devient moindre. Ainsi, dans ces sortes de vîtesses, $\frac{1}{b}$ n'est qu'une pente fictive, et ne peut être considéré que comme le rapport de la résistance au poids de la colonne mue.

39. Quoique ce rapport puisse surpasser l'unité, il ne peut jamais devenir infini; car en supposant qu'on augmente la charge du tuyau jusqu'à ce qu'elle devienne infinie, qu'en résultera-t-il pour la vîtesse? Si elle était finie, et qu'on retranchât de la hauteur entiere de la charge celle qui lui serait due, le reste serait une colonne infinie, employée à vaincre la résistance d'une vîtesse finie, ce qui est contraire à la loi observée jusqu'à présent ; la vîtesse serait donc infinie, et en retranchant la hauteur infinie qui lui est due, de la

charge entiere, qui est aussi infinie, le reste serait probablement une hauteur finie, faisant équilibre à la résistance, qui sans doute le serait aussi; et ce raisonnement s'accorde avec ce que nous venons de conclure (37) de notre hypothese sur la nature du frottement de l'eau.

40. La valeur de b peut donc demeurer finie, quoique la vîtesse devienne infinie. Ainsi, en adoptant ce principe, nous l'avons confronté avec nos expériences, qui offrent une suite de valeurs de $\frac{1}{b}$, depuis $\frac{1}{15000}$ jusqu'à $\frac{1}{0,1}$, ce qui nous a mis en état de connaître la relation entre la vîtesse et résistance, ou du moins de pouvoir l'exprimer d'une manière analytique très-rapprochée.

Pour cela il fallait réduire toutes nos expériences à un seul lit, parce qu'il n'était pas possible de faire varier les pentes dans un même lit, depuis les plus grandes jusqu'aux plus petites; et cette réduction ne peut paraître sujette à aucune difficulté; puisque nous avons trouvé (32) que les vîtesses, à même pente, dans des lits différents, sont proportionnelles aux valeurs de $\sqrt{r}-0,1$. Cette vérité est d'ailleurs assez sensible par la comparaison de quelques expériences du tableau, (§. 55) où le hasard a fait que les valeurs de b, ou les pentes sont sensiblement égales, dans des lits très-différents. En effet, si on compare deux à deux les expériences 5 et 22, 9 et 40, 36 et 71, 44 et 60, on aura les résultats suivants.

Numéros des expériences tirées du tableau par. 55.	Valeurs de b.	Valeurs de $\sqrt{r} - 0,1$.	Vîtesses d'expériences.	Rapports de $\sqrt{r} - 0,1$.	Rapports des vîtesses.
			po.		
5	1,0396	0,076776	42,385	....1,899..	...1,906
22	1,0444	0,145798	80,822		
9	7,03597	0,076776	14,642	....5,209..	...4,869
40	7,48082	0,40000	71,301		
36	21,66360	0,145798	14,295	....4,176..	...4,120
71	21,47087	0,608945	58,903		
44	33,66578	0,40000	28,669	....1,225..	...1,225
60	33,61660	0,47735	35,130		

41. On voit par ce petit tableau que les vîtesses à pentes égales étant sensiblement proportionnelles à la racine quarrée du rayon moyen, moins un dixieme, on peut rapporter une expérience quelconque, c'est-à-dire où l'eau coulait dans tel lit que ce soit, à tout autre lit, dont on fixera le rayon moyen à volonté. Ce sera le moyen de connaître plus exactement comment les vîtesses varient dans toute la suite des pentes que nous avons pu nous procurer, en éliminant la différence des lits. Nous choisissons pour cela un lit dans lequel on aurait $\sqrt{r} - 0,1 = 1$: comme cela arriverait dans un tuyau de 4po.,84 de diametre. Cette supposition facilite beaucoup le calcul des vîtesses qui conviendraient à ce rayon moyen supposé constant, en les tirant d'une expérience quelconque. Par exemple, si l'on cherche quelle vîtesse aurait l'eau dans le tuyau, à une pente représentée par

$\frac{1}{33,66578}$, et égale à celle de l'expérience 44me, où la valeur de $\sqrt{r}$—,1 est 04, on fera la proportion 0,4 : :: 28$^{po.}$, 669 est à un quatrieme terme, qui est la vîtesse cherchée, égale à 71,672 pouces. Telle est la marche que nous allons suivre, en continuant nos recherches sur la relation qu'il y a entre la vîtesse et la pente.

CHAPITRE V.

Recherches sur le rapport qu'il y a entre les vitesses de l'eau et la pente de son lit.

42. Si on compare deux à deux les vîtesses produites dans un même lit par des pentes différentes, on trouvera que le rapport des vîtesses surpasse constamment celui des racines quarrées des pentes, ou, comme nous l'avons déjà dit, (27) que les vîtesses croissent en plus grande raison que les racines des pentes. Plus la différence des pentes sera grande, plus les rapports dont nous parlons différeront entre eux, mais leurs différences croîtront d'autant plus que les pentes seront déjà plus grandes.

Pour rendre plus sensibles ces vérités, que nous n'avons puisées que dans l'expérience, nous donnerons ici un tableau de comparaison entre les vîtesses et les pentes du lit, dans lequel on aurait $\sqrt{r}$—0,1=1, tirées de nos propres expériences et de celles de M. l'abbé Bossut et de M. Couplet, par la méthode exposée à la fin du chapitre pré-

cédent. Les pentes y sont variées depuis $\frac{1}{1}$ jusqu'à $\frac{1}{9288}$. La premiere colonne indique le numéro de l'expérience rapportée dans le tableau du paragraphe 55, de laquelle on a conclu la vîtesse. La seconde exprime la pente du lit. La troisieme est la racine quarrée de b, ou de l'inverse de la pente. La quatrieme est la vîtesse conclue de celle de l'expérience. La cinquieme exprime la valeur de $V\sqrt{b}$, qui serait (26) constante, si les résistances croîssaient comme le quarré des vîtesses, ou si les vîtesses croîssaient comme les racines quarrées des pentes. La sixieme montre les différences entre les valeurs de $\sqrt{b}$, prises dans deux pentes consécutives; et la septieme, les différences correspondantes des valeurs de $V\sqrt{b}$, prises dans les mêmes pentes.

Tableau du mouvement de l'eau dans un tuyau de 4po., 84 de diametre, dont les pentes seraient variées depuis la verticale jusqu'à $\frac{1}{9288}$.

Numéros des expériences extraites du tabl. du par. 55.	Pentes du tuyau, ou valeurs de $\frac{1}{b}$	Valeurs de $\sqrt{b}$, ou de la racine de l'inverse de la pente.	Valeurs de V, ou de la vitesse conclue de l'expérience.	Valeurs de $V\sqrt{b}$.	Différences des valeurs de $\sqrt{b}$.	Différences des valeurs de $V\sqrt{b}$.
21	$\frac{1}{1,006424}$	1,0032	565,64	567,45	0,6671	po. 32,02
16	$\frac{1}{2,79005}$	1,6703	320,56	535,43	0,7067	30,65
39	$\frac{1}{5,65026}$	2,3770	212,36	504,78	1,1532	30,56
34	$\frac{1}{12,4624}$	3,5302	134,34	474,22	1,1034	26,16
71	$\frac{1}{21,47087}$	4,6336	96,72	448,06	1,3502	25,56
72	$\frac{1}{35,80824}$	5,9839	70,60	422,50	0,9698	13,53
62	$\frac{1}{48,35416}$	6,9537	58,81	408,97	1,0561	8,66
47	$\frac{1}{64,15725}$	8,0098	49,98	400,31	2,0416	20,59
50	$\frac{1}{101,0309}$	10,0514	37,78	379,72	2,4146	12,36
69	$\frac{1}{155,4016}$	12,4660	29,467	367,33	3,5922	18,55
54	$\frac{1}{257,8663}$	16,0582	21,723	348,78	21,5184	34,11
113	$\frac{1}{1412}$	37,5766	8,374	314,67	20,5454	10,81
83	$\frac{1}{3378,26}$	58,1220	5,228	303,86	5,1675	5,07
85	$\frac{1}{4005,66}$	63,2895	4,721	298,79	33,0845	13,97
114	$\frac{1}{9288}$	96,3740	2,955	284,82		

43. On voit par ce tableau que les valeurs de $V\sqrt{b}$, au lieu d'être constantes, vont toujours en croissant, à mesure que les vîtesses augmentent, ou que $\sqrt{b}$ diminue ; et que les différences de ces valeurs ne sont pas constantes non plus, mais qu'elles croissent de plus en plus, quand elles répondent à des valeurs de $\sqrt{b}$ qui sont en progression arithmétique. Quand les valeurs de $\sqrt{b}$ sont déjà considérables, et qu'elles ne different que d'une petite quantité, les différences de $V\sqrt{b}$ deviennent presque insensibles ; et lorsqu'au contraire les valeurs de $\sqrt{b}$ sont petites, c'est-à-dire, la pente très-grande, et qu'elles different seulement d'une unité, les valeurs correspondantes des différences de $V\sqrt{b}$ sont considérables ; c'est-à-dire, que la différence entre le rapport des vîtesses et celui des racines de leurs pentes va toujours en croissant avec les vîtesses.

44. Pour se faire une idée plus exacte de la loi
Fig. 4. que nous cherchons, représentons la suite de nos vîtesses par les ordonnées d'une courbe. Si ces vîtesses étaient comme les racines quarrées des pentes, l'équation $V=\frac{A}{\sqrt{b}}$ appartiendrait à une hyperbole équilatere NKS, entre ses asymptotes MA, AB ; les valeurs de $\sqrt{b}$ étant représentées par les abcisses sur la ligne AB, les vîtesses le seraient par les ordonnées ; $V\sqrt{b}=A$ représenterait la puissance de l'hyperbole ; mais puisque les vraies vîtesses ne sont sensiblement égales à $\frac{A}{\sqrt{b}}$, que lorsque $\sqrt{b}$ est très-grand, et qu'elles

surpassent de plus en plus cette valeur, à mesure que $\sqrt{b}$ diminue ; on peut les exprimer par les ordonnées de la courbe PGT, qui se confond avec la premiere, à une grande distance de l'origine A, et s'en éloigne d'autant plus que les abcisses communes diminuent ; de sorte que si AQ représente la valeur de $\sqrt{b}$, quand la vîtesse est infinie, la ligne QO est l'asymptote de la nouvelle courbe ; ses ordonnées sont égales à $\frac{A}{X}$, et celles de la premiere à $\frac{A}{\sqrt{b}}$. Ainsi, le rapport entre ces ordonnées, ou $\frac{\sqrt{b}}{X}$ doit être tel qu'il s'approche d'autant plus de l'unité que $\sqrt{b}$ est grand, et qu'il la surpasse d'autant plus que $\sqrt{b}$ diminue.

45. Pour exprimer X en fonction de $\sqrt{b}$, de maniere à remplir ces conditions, on voit d'abord en général que X *doit être plus petit que* $\sqrt{b}$, et ne doit être égal à aucune de ses puissances fractionnaires ; car alors le rapport $\frac{\sqrt{b}}{X}$ différerait d'autant plus de l'unité, que $\sqrt{b}$ serait plus grand. Si l'on fait $X = q\sqrt{b}$, q étant un nombre fractionnaire, constant ou variable, suivant quelque puissance de $\sqrt{b}$, on trouvera encore le même défaut. En faisant $X = \sqrt{b} - K$, prenant K pour un nombre constant, on satisfait assez bien à la premiere condition ; mais K doit être très-petit, afin que X ne devienne zéro qu'à une très-petite valeur de $\sqrt{b}$; et on voit, d'après l'expérience, que le rapport $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - K}$ n'augmente pas assez dans

4.

certaines pentes, lorsque K est moindre que l'unité, et que cette quantité doit nécessairement être variable. Si on prend pour K une puissance fractionnaire de $\sqrt{b}$, il arrivera que $X=o$ lorsque $\sqrt{b}=1$, ce qui est encore contraire à l'expérience. On voit donc qu'aucun exposant constant ne peut donner la valeur de X en fonction de $\sqrt{b}$; il faut que cet exposant soit variable, ce qui ramene à une loi logarithmique, et paraît s'accorder avec l'observation précédente, (43) que la loi générale n'est suivie qu'en comparant des abcisses ou des valeurs de $\sqrt{b}$, qui soient en progression arithmétique. Nous avons d'abord essayé de faire $K=L. \sqrt{b}$, ou $X=\sqrt{b}-L. \sqrt{b}$; et en effet, plus un nombre est grand, moins il est diminué par la soustraction de son logarithme: ainsi, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b}}$ s'approche d'autant plus de l'unité, que $\sqrt{b}$ est plus grand; la formule devient alors $V=\frac{A}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b}}$. En comparant cette formule avec les résultats de l'expérience, il s'y trouve un accord singulier, depuis les plus petites pentes jusqu'à celles de $\frac{1}{10}$, qui est la plus grande que M. l'abbé Bossut ait employée dans ses tuyaux, et qui excede même les bornes ordinaires de la pratique: mais quand la pente devient plus grande, on trouve que les vitesses calculées sont au-dessous de celles de l'expérience, et d'autant plus que la pente s'approche de la verticale; et il reste à desirer que la formule devienne générale, pour embrasser tous les cas. Comme la théorie devient

ici insuffisante, l'expérience seule a pu nous indiquer la vraie valeur de X. Elle doit être telle que, pour la pente verticale, elle donne les vîtesses presque doubles de celles que donnerait la formule $V = \frac{A}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b}}$, comme nous le ferons voir par la suite, et comme on le remarque déjà dans le tableau précédent. C'est aussi l'expérience qui a indiqué le module du logarithme de $\sqrt{b}$. La relation qu'il y a entre la courbe des vîtesses et l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, nous a induits à essayer les logarithmes hyperboliques, et nous avons trouvé qu'en effet ils étaient les seuls qui convinssent avec l'expérience. On sait qu'on les obtient en multipliant ceux des tables par le nombre 2,302585, ou simplement par 2,3, ce qui est suffisant pour notre objet. Nous allons continuer nos recherches pour perfectionner la formule.

CHAPITRE VI.

Suite des recherches pour rendre générale la formule du mouvement uniforme. Effets de la viscosité de l'eau.

46. Puisque la formule $V = \frac{A}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b}}$ s'accorde avec l'expérience dans tous les cas où la pente n'est pas plus grande que $\frac{1}{10}$, et qu'elle donne de trop petites vîtesses, quand la pente devient plus

grande, nous avons dû conclure qu'il s'y trouvait quelque quantité négligée, dont l'influence n'était sensible que pour de petites valeurs de $\sqrt{b}$. Nous avons vu en effet que le rapport $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b}}$ doit augmenter jusqu'à l'infini, à mesure que $\sqrt{b}$ diminue. Cependant si l'on fait $\sqrt{b}=1$, la quantité totale se réduira aussi à l'unité ; elle sera encore moindre, si on fait $\sqrt{b}$ plus petit ; et si on cherche son *maximum*, on verra qu'il répond à $L.\sqrt{b}=1$. Alors le rapport est $\frac{2,71828}{1,71828}$; mais au-delà de ce terme il diminue.

Les expériences faites avec des petits tuyaux de verre nous avaient déjà fait connaître, beaucoup plus parfaitement que les autres, la vraie relation entre la vîtesse et les rayons moyens ; elles nous ont encore été très-utiles pour connaître le rapport des vîtesses dans les grandes pentes, par la facilité d'incliner ces tuyaux à volonté, et de diminuer les valeurs de $\sqrt{b}$ jusqu'à l'unité, et même au-delà. Elles nous ont donc fait connaître que la formule $V=\frac{A}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b}}$ donnait les vîtesses trop petites.

Pour corriger cette expression, au lieu de $L.\sqrt{b}$, nous avons essayé $L.\sqrt{b+c}$, en nommant c une quantité assez petite pour ne pas influer sensiblement sur les vîtesses, quand la pente est moindre que $\frac{1}{10}$. Mais avant de déterminer sa valeur d'après l'expérience, il est bon d'examiner si

quelqu'une de ces valeurs peut satisfaire aux conditions générales que nous cherchons à remplir.

47. En représentant b par x, le rapport $\frac{\sqrt{b}}{X}$ qui doit toujours augmenter quand $\sqrt{b}$ diminue, sera $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-L.\sqrt{x+c}}$. Supposons que cette quantité représente les ordonnées y d'une courbe quelconque, dont x soit l'abcisse, en sorte qu'on ait $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-L.\sqrt{x+c}}$. Pour que les ordonnées aillent toujours en croissant, il faut que cette courbe soit telle qu'en aucun point elle ne soit parallele aux abcisses. Ainsi, toute valeur de c qui pourrait rendre y un *maximum* ou un *minimum*, devra être rejetée. Il faut au contraire que cette valeur rende la courbe continue, sans inflexion, et qu'elle s'éloigne de l'abcisse à une distance infinie, avant que x soit réduit à *zéro*.

En différenciant l'équation $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-L.\sqrt{x+c}}$ et faisant $dy = 0$, on aura celle-ci $L.(x+c) = \frac{2x}{x+c}$, qui indique tous les points où la courbe est parallele aux abcisses, et qui dépendent des différentes valeurs qu'on peut donner à c. Si on suppose cette quantité égale à 0, on aura $L.x = 2$, ou $x = 7{,}389$, comme nous l'avons trouvé tout-à-l'heure (46). En faisant $c = 1$, l'équation $L.(x+1) = \frac{2x}{x+2}$ donne à x deux valeurs, qui sont environ 4 et 0, la premiere pour le *maximum*

de l'ordonnée, et l'autre pour le *minimum*. Si $c = 1,2$, le résultat est semblable, mais les points du *maximum* et du *minimum* se rapprochent, et répondent à-peu-près aux valeurs de $x = 2,95$ et $0,313$. Ces deux points de la courbe, paralleles aux abcisses, se rapprochent encore, si on augmente un peu la valeur de c, et se réunissent enfin en un seul point qui répond à $x = 1$, lorsque $c = 1,35$ environ : au-delà de ce terme l'équation est imaginaire, parce que les ordonnées allant toujours en croissant, on ne peut pas supposer $dy = 0$. Ainsi, pour que la constante c puisse convenir à la formule, il faut qu'on ait $c > 1,35$.

48. En consultant l'expérience jusqu'à des valeurs de $\sqrt{b}$ moindres que l'unité, on trouve qu'en effet c peut être supposé une quantité constante, et égale à $1,6$; et ainsi la formule $V = \frac{A}{X}$ devient $V = \frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r} - 0,1)}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b + 1,6}}$.

On peut remarquer que l'addition de la quantité c ne devient sensible qu'à de petites valeurs de b; car si on prend $b = 20$, les valeurs de $\sqrt{b} - L.\sqrt{b}$, et de $\sqrt{b} - L.\sqrt{b + 1,6}$, ne different que d'environ $\frac{1}{70}$, et cette différence est encore bien moindre à une pente plus petite. Ainsi, sans rien changer aux résultats qui s'accordaient si bien avec l'expérience jusqu'à la pente $\frac{1}{20}$, nous avons trouvé la loi générale qui répond aux plus grands et aux plus petits rapports entre la vîtesse et la résistance.

Dans la pratique, on ne produit ordinairement

dans un tuyau que des vîtesses très-bornées : ainsi, la connaissance de celles qui répondent à de très-petites valeurs de b, est de pure spéculation ; cependant elle n'en est pas moins précieuse pour ceux qui, en observant la nature, n'examinent pas seulement ce qu'elle produit, mais aussi ce qu'elle peut produire. Le calcul présente la loi dans toute son extension. Veut-on, par exemple, connaître la résistance qui résulte d'une vîtesse infinie, on verra qu'il faut qu'on ait $\sqrt{b} = L. \sqrt{b + 1{,}6}$: or, cette équation a lieu lorsque $b =$ 0,064977 environ. En effet, $\sqrt{b}$ ou $\sqrt{0{,}064977}$ est égal à 0,25,4905, et le logarithme des tables de $\sqrt{0{,}064977 + 1{,}6}$ étant 0,1107041, si on le multiplie par 2,302584, pour le rendre hyperbolique, on a de même $L. \sqrt{b + 1{,}6} = 0{,}254905$: ainsi, lorsque la vîtesse est infinie, la résistance est à-peu-près égale à $\frac{1}{0{,}064977}$, ou 15,39 fois le poids de la colonne d'eau en mouvement, abstraction faite de la résistance que l'air opposerait à sa sortie : car nous aurons occasion de remarquer que l'air oppose une résistance considérable à une colonne d'eau qui sort d'un vase ou d'un tuyau avec une très-grande vîtesse ; cet effet commence à devenir sensible, quand la vîtesse est produite par une chûte de 3 à 4 pieds.

49. Après avoir déterminé comment le frottement, l'adhésion de l'eau aux parois, et la communication de l'inertie du lit à toute la masse mue, influaient sur la résistance, il ne reste plus

à examiner qu'un élément, qui n'est sensible que dans les petites vîtesses, surtout quand les lits sont considérables.

La viscosité de l'eau, ou l'adhérence que ses particules ont entre elles, occasionne une résistance très-petite, mais finie, qui s'oppose sans cesse à leur séparation: or, il ne peut y avoir de mouvement uniforme dans l'eau, sans que ses filets ne prennent différentes vîtesses, selon qu'ils sont plus ou moins proches de la paroi, qui retarde et rend uniforme le mouvement de toute la masse. Cette inégalité de vîtesses ne peut avoir lieu sans une séparation mutuelle des parties contiguës. La viscosité, ou, si l'on veut, la force avec laquelle ces parties s'attirent, s'oppose à cette séparation; il faut donc qu'il y ait constamment une partie de la force accélératrice destinée à vaincre cette résistance; et lorsque la force accélératrice est assez petite pour lui être seulement égale, le mouvement doit cesser, quoique la pente soit finie. S'il existait un fluide dont les parties n'eussent aucune adhérence entre elles, la plus petite pente possible suffirait pour lui imprimer un mouvement; mais les différents liquides connus éprouvant plus ou moins l'effet de la viscosité, la pente à laquelle ils commencent à couler est d'autant plus grande que l'adhérence de leurs parties les éloigne moins de la nature des solides. Cet élément est donc variable, suivant la différence des fluides, et il s'agit seulement ici d'en fixer la valeur relativement à l'eau.

50. La résistance que deux molécules opposent à leur séparation doit dépendre de la vîtesse avec laquelle elles se séparent; mais pour peu que la vîtesse moyenne d'un courant d'eau soit sensible, l'excès de la vîtesse d'une molécule sur celle de la molécule voisine qui constitue réellement la vîtesse de séparation, est toujours très-petit, et peut être pris pour une quantité constante, sans craindre d'erreur sensible.

Les expériences du paragraphe 389, et la table que nous donnerons ci-après (67), font voir que la différence des vîtesses des filets d'eau de la surface et du fond, ou des vîtesses dans l'axe d'un tuyau et à sa paroi, ne croissent pas comme les vîtesses, mais comme les racines quarrées des vîtesses moyennes à très-peu près. Ainsi, la vîtesse réelle de séparation des molécules dans un même lit croît à peu près dans *le même rapport*; mais elle reste toujours infiniment petite, parce que l'excès des deux vîtesses dont nous parlons doit être réparti sur tout le nombre des molécules qui se trouvent dans le rayon du tuyau, ou dans la profondeur du courant.

Ainsi, nous supposerons qu'il y a sans cesse une partie de la force accélératrice employée à vaincre cette résistance, et que le mouvement s'anéantit, quand ces deux forces se font équilibre.

Supposons donc que $\frac{1}{B}$ soit la très-petite pente relative à cette partie de la force accélératrice; si elle n'était pas employée à vaincre une résistance, elle produirait une vîtesse qui est réellement

perdue ; de sorte qu'en raisonnant pour celle-ci comme pour la vîtesse réelle, sa valeur sera $\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0{,}1)}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}}$, quantité qu'il faudra toujours retrancher de la vîtesse que nous avons déterminée. Ainsi, l'expression de la vîtesse moyenne devient réellement $V=\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0{,}1)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1{,}6}}-\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0{,}1)}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}}$

$=(\sqrt{r}-0{,}1)\left(\frac{\sqrt{ng}}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1{,}6}}-\frac{\sqrt{ng}}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}}\right)$;

mais comme le terme $\frac{\sqrt{ng}}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}}$ n'est composé que de quantités constantes, on peut l'évaluer en un seul nombre.

La détermination exacte de cette quantité exigerait des expériences très-délicates ; et nous n'avons pu obtenir à cet égard qu'une simple estimation, qui sera cependant très-suffisante pour la pratique. En combinant toutes les expériences, nous avons vu qu'on peut faire $\frac{\sqrt{ng}}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}}$

$=\sqrt{0^{po.},09}=0^{po.},3$ environ.

CHAPITRE VII.

Formule générale des vîtesses moyennes uniformes de l'eau dans un lit quelconque. Analyse de formule. Cause de l'anéantissement de la vîtesse. Résumé des principes.

51. D'après toutes les considérations précédentes, puisées dans la nature, appuyées par le raisonnement, et autorisées par l'expérience, nous sommes en état de conclure la formule complete du mouvement uniforme de l'eau, eu égard à tous les éléments que nous avons pu apercevoir.

Soient donc nommées :

V. La vîtesse moyenne, uniforme par seconde, exprimée en pouces, d'un courant quelconque, contenu dans un lit, dont la section et la pente sont constantes, et la longueur indéfinie.

r. Le rayon moyen, c'est-à-dire, le quotient de la section du lit, exprimée en pouces quarrés, divisée par sa paroi, exprimée en pouces linéaires : dans les lits circulaires, ce rayon moyen est toujours exprimé par le quart du diametre.

n. Un nombre abstrait et constant, que l'expérience donne égal à 243,7.

g. La vîtesse acquise à la fin d'une seconde, par un corps grave qui tombe librement ; on sait qu'elle est égale à 362 pouces.

b. Le dénominateur de la fraction, qui exprime la pente du lit ou de la surface de l'eau, en supposant le numérateur égal à l'unité : ainsi, une pente d'un pouce sur mille est $\frac{1}{1000}$, et $b = 1000$.

c. Un nombre abstrait et constant, que l'expérience donne égal à 1,6 ou $\frac{16}{10}$.

On aura $V = \frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r} - 0,1)}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b+c}} - 0,3(\sqrt{r} - 0,1)$;

ou en nombres, $V = \frac{297(\sqrt{r} - 0,1)}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3(\sqrt{r} - 0,1)$.

52. Cette formule étant composée de plusieurs quantités abstraites et concretes, il n'est pas inutile de les distinguer, pour voir ce qu'elle deviendrait, si on prenait toute autre unité que le pouce.

La vîtesse étant l'espace parcouru pendant une seconde, peut être représentée par une ligne composée de pouces, de pieds ou de toises, et son expression doit être de même espece.

On a déja vu que *n* est un nombre abstrait, *g* et *r* sont des lignes dont l'expression doit être de même espece que celle de la vîtesse.

La quantité 0,1 est de même nature que $\sqrt{r}$; car son quarré 0po.,01 est le rayon moyen d'un lit, dans lequel l'attraction des bords fait équilibre à la force accélératrice ; par conséquent, le numérateur du premier terme de la formule est une ligne.

Les quantités du dénominateur sont abstraites, puisque *b* exprime toujours le nombre de fois que

la hauteur du plan incliné est contenue dans sa longueur, ou le nombre de fois que le poids qui fait équilibre à la résistance est contenu dans le poids absolu de la colonne qui se meut.

On voit de même que le deuxieme terme $0,3 (\sqrt{r} - 0,1)$ est une quantité linéaire.

Si donc on prenait le pied pour unité, il faudrait diviser par $\sqrt{12}$ les quantités $\sqrt{362}$; 0,1 et 0,3, et la formule serait $V = \frac{85,7(\sqrt{r} - 0,02887)}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}} - 0,0866(\sqrt{r} - 0,02887)$.

Le pied de Londres est à celui de Paris :: 1000 : 1068. Ainsi, un corps grave parcourt en tombant, pendant la premiere seconde, 193,3 pouces de Londres; et g vaut dans ce cas 386,6: on aurait donc $\sqrt{ng} = 307$, à peu de chose près. Ainsi, la formule anglaise de la vitesse exprimée en pouces serait $V = \frac{307(\sqrt{r} - 0,1)}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3(\sqrt{r} - 0,1)$, en négligeant la petite variation des quantités 0,1 et 0,3.

53. Notre formule rend raison des causes qui peuvent anéantir la vitesse, quoique l'eau ait encore une pente ou une force accélératrice; car l'eau peut cesser de couler, 1[d] quand $\sqrt{r}$ devient égal à 0,1, ce qui a lieu dans un tuyau dont le diametre a un peu moins d'une demi-ligne. Ce tube est alors si capillaire que l'attraction des parois s'oppose au cours uniforme de l'eau; il faut des secousses pour l'obliger à s'y mouvoir, quelque charge qu'on lui donne; et on sait même que sans

aucune charge l'attraction seule fait élever l'eau dans ces sortes de tubes : ainsi les résultats théoriques s'arrêtent au point où la loi générale ne peut plus avoir lieu. On pourrait même s'étonner d'une si grande précision, puisqu'ayant fait couler de l'eau dans un tube dont nous avions estimé que le diametre était de $\frac{2}{3}$ de ligne, et l'ayant ensuite calculé par la formule, d'après sa dépense, sa charge et sa longueur, nous avons trouvé qu'il était de 0,664 li. (Expériences 1 et 2 du tableau § 55.)

2° La seconde cause qui annulle la vîtesse est la petitesse de la pente, c'est-à-dire, que l'eau cesse de couler, quand les deux termes de la valeur de V sont égaux, ou qu'on a simplement $\frac{297}{\sqrt{b} - \text{L}.\sqrt{b}} = 0,3$. Ce résultat a lieu quand la pente est d'environ un millionnieme, sauf l'erreur qu'il peut y avoir dans l'évaluation de la quantité 0,3 ; erreur qui ne pourrait être qu'en moins, dans ce cas. Ainsi, on pourrait croire que la plus petite pente qu'on puisse donner à un canal, pour que la vîtesse y soit sensible, serait $\frac{1}{500000}$, en doublant la précédente, ce qui reviendrait à-peu-près à $\frac{1}{6}$ de ligne par cent toises. On voit par là quel fond on doit faire sur les principes d'après lesquels quelques Hydrauliciens ont fixé la pente dont nous parlons à $\frac{1}{7200}$, ou à un pouce pour 100 toises, et même davantage : si notre théorie ne les oblige pas à changer leur estimation, ils se rendront peut-être du moins à l'évidence de nos expériences, où nous nous sommes assurés que l'eau avait

6 pouces de vîtesse dans notre canal factice, fixé à une pente de $\frac{1}{9288}$; 7 pouces de vîtesse dans un canal de desséchement, près de Condé, dont la pente était de $\frac{1}{27000}$; et enfin 10 pouces de vîtesse dans la riviere de la Hayne, avec une pente de $\frac{1}{33000}$.

On ne peut pas raisonner contre des faits, mais il faut cependant avouer qu'il est très-difficile de fixer quelque chose de positif à cet égard. Car, quoique le mouvement puisse s'anéantir à la même pente pour toutes sortes de lits, il n'en est pas de même quand il s'agit d'une vîtesse sensible, comme serait celle d'un pouce par seconde. Dans ce cas, la pente dépend nécessairement de la grandeur du lit. Si on cherchait par exemple la pente que devrait avoir un canal de desséchement, pour couler avec une vîtesse moyenne d'un pouce par seconde, en supposant qu'il fût de figure trapeze, dont la largeur à la surface de l'eau fût de 20 pieds, celle du fond de 14, et la profondeur de l'eau de 3 pieds, en sorte qu'il dépensât 7344 pouces cubes ou 4 $\frac{1}{4}$ pieds cubes par seconde, on trouverait par la formule que sa pente devrait être de $\frac{1}{367236}$.

On pourrait peut-être nous opposer une expérience de M. l'abbé Bossut, qui paraît d'abord détruire nos principes, et qui cependant les confirme. Ayant donné une charge de seize lignes au-dessus du point le plus bas de la paroi de deux tuyaux horizontaux, dont les diametres étaient de seize lignes et de deux pouces, l'eau qu'on a

reçue à 180 pieds de distance ne coulait plus que goutte à goutte ; d'où il semble qu'on pourrait conclure que, pour obtenir un mouvement continu, il faut à l'eau une pente de 20 lignes sur 180 pieds, ou de $\frac{1}{1296}$. Mais on doit remarquer que, le tuyau étant horizontal, l'eau ne pouvait y couler sans diminuer sa section ; et, lorsque cette section était moindre que le demi-cercle, la diminution du rayon moyen occasionnait celle de la vîtesse. Ces deux effets devenaient plus sensibles, à mesure que la premiere eau cheminait le long du tuyau ; et enfin la section se réduisait à un tel point, pour acquérir de la pente, que $\sqrt{r}$ devenait à-peu-près égal à 0,1, ce qui anéantissait le mouvement. Ainsi, la cessation du mouvement ne doit pas, dans ce cas, être attribuée à la petitesse de la pente, mais à celle de la section. Le résultat eût été bien différent, si l'eau eût rempli toute la capacité du tuyau ; et l'on voit en effet par nos expériences, qu'un tuyau d'un pouce de diametre, qui dégorgeait sous l'eau d'un bassin, et qui coulait par conséquent très-plein, donnait une vîtesse de plus d'un pouce et demi, quoiqu'il n'eût qu'une pente de $\frac{1}{5000}$.

54. Avant de faire la comparaison des résultats de l'expérience avec la théorie, par le tableau général que nous avons annoncé, il est bon de rappeler en peu de mots les principes qui ont servi de base à notre formule, pour les rassembler sous un seul point de vue. 1° On peut supposer que les molécules de l'eau sont des corps d'une

ténuité inimaginable, parfaitement sphériques, durs et polis. Dans un tel système de corpuscules, la pression ne peut influer sur le frottement.

2° Les rivieres ne peuvent couler sans une pente à leur surface, et c'est la force qui en résulte qui est le seul agent de leur mouvement.

3° Lorsque la vitesse moyenne d'une eau courante est uniforme, la force accélératrice fait équilibre à la résistance des bords. Les tuyaux à cet égard sont semblables aux rivieres, pourvu qu'on retranche de la hauteur entiere du réservoir la hauteur due à la vitesse, et qu'on considere le reste comme une pente sur toute la longueur du tuyau : ainsi, le poids absolu de la colonne employée à vaincre la résistance est égal à celui de la colonne de même diametre qui se meut, multiplié par la pente $\frac{1}{b}$. Quand cette quantité excede l'unité dans le mouvement de l'eau contenue dans les tuyaux, elle n'exprime qu'une pente imaginaire, mais elle représente toujours le rapport des deux poids.

4° Les molécules d'eau s'introduisent dans les pores de la paroi, et remplissent toutes les petites cavités de sa superficie. Ainsi, elles forment elles-mêmes la surface sur laquelle toute la masse doit couler ; d'où il suit, que les différentes matieres dont les parois peuvent être composées, ne changent pas sensiblement l'intensité de la résistance.

5° La surface des parois mouillées est un assemblage de globules, sur lesquels coulent les autres particules mobiles, d'où il résulte une résistance

proportionnelle au quarré des vîtesses, quand l'engrenage des molécules est complet, c'est-à-dire, dans les petites vîtesses : mais, comme cet engrenage diminue à mesure que les vîtesses augmentent, la résistance devient pour ainsi dire nulle, à proportion de la vîtesse, quand celle-ci devient infinie. D'après ce principe et l'expérience, la relation entre la vîtesse et la pente est exprimée dans un même lit par $V = \frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b + 1,6}}$.

6° La résistance que les molécules éprouvent sur la paroi se communique à toute la masse, et celle qui en résulte pour chaque molécule est en raison directe de la paroi, et inverse de la section ; d'où il suit, qu'à même pente les vîtesses seraient comme les racines quarrées du rapport de la section à la paroi, que nous nommons *rayon moyen*, si ce rapport n'était pas altéré par l'attraction des parois sur les molécules voisines, qui s'étend à la même distance dans tous les lits ; et l'expérience donne $\sqrt{m}\sqrt{n}(\sqrt{r} - 0,1)$, et $\sqrt{ng} = 297$.

7° Chaque molécule éprouvant une résistance relative à sa distance à la paroi, les vîtesses particulieres doivent varier avec ces distances, et les molécules se séparer continuellement. Une partie de la force accélératrice est constamment employée à vaincre l'adhésion réciproque, qui s'oppose à cette séparation. La vîtesse perdue qui résulte de cet effet est égale suivant l'expérience à $0,3(\sqrt{r} - 0,1)$.

8° Parmi les différentes vîtesses des molécules,

il en est une moyenne entre toutes les autres, et qui doit varier suivant la même loi. C'est celle que nous avons considérée dans la formule comme la seule qui soit relative à la dépense ; et sa valeur générale est $V = \frac{297(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3(\sqrt{r}-0,1)$.

CHAPITRE VIII.

Accord de l'expérience et de la théorie sur le mouvement uniforme des eaux.

55. Ce n'est pas assez d'avoir cherché à fonder une théorie expérimentale sur la nature de l'eau, et sur celle du mouvement uniforme, il faut encore montrer par le fait que cette théorie s'accorde avec les effets naturels observés ci-devant par les meilleurs hydrauliciens, et en dernier lieu par nous-mêmes. Par-là, non-seulement nous éviterons le soupçon d'avoir fait cadrer nos expériences à notre théorie ; mais nous aurons l'avantage de présenter un ensemble frappant par la variété des lits et des pentes, dans lesquels le mouvement de l'eau a été observé. On a eu soin de marquer dans deux colonnes contiguës les vîtesses trouvées immédiatement par l'expérience, et celles qui ont été calculées par la formule précédente.

Nous avons ordonné le tableau suivant, depuis les plus petits rayons moyens jusqu'aux plus grands, en commençant, pour chaque lit, par

	Longueurs des Tuyaux.	Hauteurs du Réservoir.	Valeurs de *b*.	Vîtesses d'expérience.	Vîtesses calculées.
Même tuyau incliné à la pente $\frac{1}{1,3024}$.					
15	id. po.	33,500 po.	1,291741	51,151 po.	50,983 po.
Même tuyau horizontal.					
16	id.	15,292	2,79005	33,378	33,167
17	id.	8,875	4,76076	25,430	24,553
18	36,25	5,292	7,89587	19,940	18,313
19	id.	2,042	20,016366	10,620	10,492
Tuyau vertical de 2 li., 9 de diametre. $\sqrt{r} =$ 0,245798.					
20	36,25	53,250	0,952348	85,769	85,201
21	id.	50,250	1,006424	82,471	82,461
22	id.	48,333	1,044400	81,646	80,698
23	id.	48,333	1,044400	79,998	(80,698)
24	id.	47,916	1,052952	81,027	80,318
25	id.	44,750	1,124052	76,079	77,318
26	id.	41,250	1,215688	73,811	73,904
Même tuyau incliné à la pente $\frac{1}{1,3024}$.					
27	id.	37,500	1,332332	70,822	70,138
Même tuyau horizontal.					
28	id.	20,166	2,43034	51,956	50,140
29	id.	9,083	5,26858	33,577	32,442

	Longueurs des Tuyaux.	Hauteurs du Réservoir.	Valeurs de *b*.	Vitesses d'expérience.	Vitesses calculées.
	po.	po.		po.	po.
30	id.	7,361	6,45035	28,658	28,801
31	id.	5,000	9,357302	23,401	23,195
32	id.	4,916	9,509718	22,989	22,974
33	id.	4,833	9,665223	22,679	22,754
34	id.	3,708	12,4624	19,587	19,550
35	id.	2,713	16,8135	16,631	16,324
36	id.	2,083	21,6639	14,295	14,003
37	id.	1,625	27,5102	12,680	12,115
38	id.	0,833	52,3427	9,577	8,215
* *Tuyaux sensiblement horizontaux ; diamètre 1 pouce.* $\sqrt{r}=0{,}5$.					
39	117	36,000	5,65026	84,945	85,524
40	117	26,666	7,48002	71,301	72,617
41*	138,5	20,950	10,32149	58,808	60,034
42	117	18,000	10,78798	58,310	58,472
43*	138,5	6,000	33,19623	29,341	29,663
44*	737	23,700	33,66578	28,669	29,412
45	id.	14,600	54,26340	21,856	22,056
46	id.	13,700	57,77718	20,970	21,240
47	id.	12,320	64,15725	19,991	19,950
48	737	8,960	87,867 0	16,625	16,543
49*	id.	8,960		16,284	
50*	id.	7,780	101,0309	15,112	15,232
51*	id.	5,930	132,1617	13,315	13,005
52*	id.	4,200	186,0037	10,671	10,656
53*	id.	4,200		10,441	

* Dans les expériences marquées d'un astérique, le tuyau dégorgeait sous l'eau ; dans toutes les autres il dégorgeait en l'air.

	Longueurs des Tuyaux.	Hauteurs du Réservoir.	Valeurs de b.	Vitesses d'expérience.	Vitesses calculées.
	po.	po.		po.	po.
54*	138,5	0,700	257,8663	8,689	8,824
55*	737	0,500	1540,76	3,623	3,218
56	737	0,150	5113,42	1,589	1,647

Expériences de M. l'Abbé Bossut.

Tuyau horizontal; diamètre 1 *pouce.* $\sqrt{r}=0,5$.

57	600	12	54,5966	22,282	21,975
58	600	4	161,3120	12,223	11,756

Tuyau horizontal; diamètre 16 *lignes.* $\sqrt{r}=0,57735$.

59	360	24	19,0781	48,534	49,515
60	720	24	33,6166	34,473	35,130
61	360	12	37,0828	33,160	33,106
62	1080	24	48,35416	28,075	28,211
63	1440	24	63,1806	24,004	24,028
64	720	12	66,3020	23,360	23,345
65	1800	24	78,05318	21,032	21,182
66	2160	24	92,9474	18,896	19,096
67	1080	12	95,87557	18,943	18,749
68	1440	12	125,6007	16,128	15,991
69	1800	12	155,4015	14,066	14,119
70	2160	12	185,2487	12,562	12,750

Tuyau horizontal; diamètre 2 po., 01. $\sqrt{r}=0,7089458$.

71	360	24	21,47087	58,903	58,803
72	720	24	35,80824	43,000	43,136

	Longueurs des Tuyaux.	Hauteurs du Réservoir.	Valeurs de *b*.	Vitesses d'expérience.	Vitesses calculées.
	po.	po.		po.	po.
73	360	12	41,27586	40,322	39,587
74	1080	24	50,41193	35,765	35,096
75	1440	24	65,1448	30,896	30,096
76	720	12	70,14263	29,215	28,796
77	1800	24	79,94866	27,470	26,639
78	2160	24	94,79006	24,731	24,079
79	1080	12	99,4979	23,806	23,400
80	1440	12	129,0727	20,707	20,076
81	1800	12	158,75116	18,304	17,788
82	2160	12	188,5179	16,377	16,097

EXPÉRIENCES DE M. COUPLET SUR DES CONDUITES D'EAU.

Tuyau de 5 *pouces de diametre.* $\sqrt{r} = 1,118034$.

83	84240	25,000	3378,26	5,323	5,287
84	id.	24,000	3518,98	5,213	5,168
85	id.	21,083	4005,66	4,806	4,807
86	id.	16,750	5041,61	4,127	4,225
87	id.	11,333	7450,42	3,154	3,388
88	id.	5,583	15119,96	2,0107	2,2535

Tuyau de 18 *pouces de diametre.* $\sqrt{r} = 2,12132$.

89	43200	145,083	304,9734	39,159	40,510

EXPÉRIENCES SUR LE CANAL FACTICE.

	SECTIONS du Canal.	PAROIS du Canal.	VALEURS de $\sqrt{r}$.	VALEURS de b.	VITESSES moyennes d'expérienc.	VITESSES moyennes calculées.
	Canal trapèze.					
90	18,84	13,06	1,20107	212	27,51	27,19
91	50,60	29,50	1,3096	212	28,92	29,88
92	83,43	26,00	1,7913	412	27,14	28,55
93	27,20	15,31	1,33290	427	18,28	20,39
94	39,36	18,13	1,47342	427	20,30	22,71
95	50,44	20,37	1,57359	id.	22,37	24,37
96	56,43	21,50	1,62007	id.	23,54	25,14
97	98,74	28,25	1,86955	432	28,29	29,06
98	100,74	28,53	1,87910	id.	28,52	29,23
99	119,58	31,06	1,96219	id.	30,16	30,60
100	126,20	31,91	1,98868	id.	31,58	31,03
101	130,71	32,47	2,00637	id.	31,89	31,32
102	135,32	33,03	2,02407	id.	32,52	31,61
103	20,83	13,62	1,23667	1728	8,94	8,58
104	34,37	17,00	1,42188	id.	9,71	9,98
105	36,77	17,56	1,44708	id.	11,45	10,17
106	42,01	18,69	1,49924	id.	12,34	10,53
	Canal rectangulaire.					
107	34,50	21,25	1,27418	458	20,24	18,66
108	86,25	27,25	1,77908	458	28,29	26,69
109	34,50	21,25	1,27418	929	13,56	12,53
110	35,22	21,33	1,28499	1412	9,20	10,01
111	51,75	23,25	1,49191	id.	12,10	11,76
112	76,19	26,08	1,70921	id.	14,17	13,59
113	105,78	29,17	1,90427	id.	15,55	15,24
114	69,00	25,25	1,65308	9288	4,59	4,56
115	155,25	35,25	2,09868	9288	5,70	5,86

Expériences sur le canal du Jard.

	Sections du Canal.	Parois du Canal.	Valeurs de $\sqrt{r}$.	Valeurs de b.	Vitesses à la surface.	Vitesses moyennes calculées.
	po.	po.				
116	16252	402	6,3583	8919	17,42	18,77
117	11905	366	5,7032	11520	12,17	14,52
118	10475	360	5,3942	15360	15,74	11,61
119	7858	340	4,8074	21827	9,61	8,38
120	7376	337	4,6784	27648	7,79	7,07
121	6125	324	4,3475	27648	7,27	6,55
Expériences sur la rivière de Hayne.						
122	31498	569	7,43974	6048	35,11	27,62
123	38838	601	8,03879	6413	31,77	28,76
124	30905	568	7,37632	32951	13,61	10,08
125	39639	604	8,10108	35723	15,96	10,53

56. Voilà une comparaison bien satisfaisante, et qui donne un grand poids aux principes que nous avons établis. Notre théorie ne sera, si l'on veut, qu'une probabilité raisonnée ; mais du moins la nature paraît agir d'une maniere qui lui est bien analogue. La plupart de ces expériences, au reste, ne sont point dispendieuses, et peuvent être facilement répétées. Nous croyons pouvoir assurer d'avance qu'on trouvera les résultats conformes aux nôtres ; et pour aider ceux qui voudraient perfectionner notre travail, nous ajouterons dans la suite quelques réflexions sur les expériences, qui sont propres d'ailleurs à éclaircir la théorie du mouvement uniforme de l'eau.

SECTION II.

THÉORIE DU LIT DES FLEUVES. LEUR ÉTABLISSEMENT.

57. Jusqu'ici nous avons considéré le mouvement de l'eau sous le rapport unique de la vîtesse moyenne que prend un courant, en vertu de l'égalité qui existe nécessairement entre la force de la pesanteur qui l'oblige à s'écouler, et la somme des résistances qui doivent être vaincues par cette force. On a vu par le tableau qui précede, que cette loi d'égalité est observée, et fidèlement suivie dans toutes sortes de lits, depuis le lit circulaire des tuyaux de conduite jusqu'aux lits rectangulaires, trapezes et irréguliers, soit qu'ils aient beaucoup de largeur avec peu de profondeur, soit que la profondeur égale et surpasse la largeur. Nous allons examiner dans cette deuxieme section la variété que l'art ou la nature met dans la figure du lit des fleuves, les vîtesses des divers filets d'eau qui en composent la masse, l'action du courant contre son lit, la résistance du lit contre le courant, l'équilibre entre ces deux puissances, d'où naît la stabilité du lit, l'établissement originaire du lit des fleuves, le tracé de ce lit, et la loi des sinuosités qui s'y forment naturellement. Tous ces objets nous conduiront à une connaissance assez exacte de la nature des fleuves,

et doivent précéder les regles que nous donnerons ensuite pour appliquer la théorie à la pratique. Nous ferons toujours marcher de front le raisonnement avec l'expérience, afin d'éviter les erreurs et les méprises où il n'est que trop aisé de tomber, dans l'étude des sciences physico-mathématiques.

CHAPITRE I.

De la figure du lit des fleuves, ou d'un courant quelconque.

58. Puisque la résistance naît du lit, et qu'à sections égales, elle est d'autant plus grande que le périmetre du lit est plus grand, il est clair que la figure circulaire est celle où la résistance est la moindre, puisque le cercle renferme un espace sous le moindre périmetre possible. On emploie cette forme dans les conduites d'eau qui se font en bois, en terre cuite, en fer, en plomb, etc., et c'est avec raison; puisque l'avantage d'épargner la matiere se trouve réuni à celui de procurer la plus grande dépense d'eau, toutes choses égales d'ailleurs. Dans un lit circulaire, le rayon moyen est toujours égal au quart du diametre, parce que l'aire d'un cercle étant le produit de la circonférence par la moitié du rayon, ce produit, divisé par la paroi, qui est la circonférence même,

redevient la moitié du rayon, ou le quart du diametre.

Si la figure de la section est un demi-cercle, *r* aura encore la même valeur.

En général, parmi tous les polygones réguliers de même surface, celui qui aura le plus grand nombre de côtés aura aussi le plus grand rayon moyen; et il en sera de même de leurs moitiés, qui ont le même rayon moyen que chaque polygone entier. Ainsi, l'exagone donne, à surface égale, une plus grande valeur de *r* que le pentagone, et celui-ci en donne une plus grande que le quarré. La moitié de l'exagone, qui est un trapeze régulier, a le même rayon moyen que l'exagone, et l'emporte par conséquent sur le demi-pentagone, et encore plus sur la moitié du quarré.

C'est encore un principe général, que quand la figure de la section est constante, le rayon a un rapport constant avec l'une ou l'autre de ses dimensions.

59. La figure rectangulaire ne convient qu'aux canaux ou aqueducs revêtus en maçonnerie: ainsi, les lits ordinaires des rivieres, creusés dans la terre par la nature ou par l'art, ne pouvant avoir leurs bords verticaux, ont communément la forme d'un trapeze. Voici une valeur générale du rayon moyen qui convient à cette figure.

Soit le trapeze régulier ABCD, qui représente la section d'un lit de riviere. Nommons *h* la hauteur FB; *l* la largeur du fond BC; et *a* l'angle

ABG ou BAD. On aura $AF = \frac{h \cos. a}{\sin. a}$, et $AB = \frac{h}{\sin. a}$, en prenant l'unité pour le sinus total. La section sera donc $lh + \frac{h^2 \cos. a}{\sin. a}$; la paroi sera $l + \frac{2h}{\sin. a}$, et r

$$= \frac{h\left(l + \frac{h \cos. a}{\sin. a}\right)}{l + \frac{2h}{\sin. a}} = \frac{l \sin. a + h \cos. a}{\frac{l}{h} + 2},$$ formule qui devient celle du lit rectangulaire, en faisant sin. $a = 1$.

60. Entre tous les trapezes il est clair, ainsi que nous l'avons déja dit (58), que celui qui fait la moitié d'un hexagone, est celui qui donne la plus grande valeur de r, à surface égale; mais il offre des talus trop roides, pour que les terres ordinaires puissent se soutenir sans s'ébouler. On remarque que la proportion la plus commune des talus de terre doit être de quatre parties de base pour trois de hauteur verticale : ceux qui n'ont que pied pour pied, ou l'inclinaison de 45 degrés, n'ont point encore assez de solidité.

Si donc on suppose que AH et HB, CG et GE fig. 6, soient également dans le rapport de 3 à 4, les hypothénuses AB et CE seront représentées par le nombre 5; et si on partage en deux également les lignes AB ou HB, CE ou GE, et qu'on tire les verticales DF et IK, le lit rectangulaire FDIK aura même surface que le trapèze ABEC; mais les périmetres de ces deux lits seront aussi égaux, parce qu'on a AB=FD+DB, et CE=KI+IE. La valeur du rayon moyen sera donc la même dans ces deux figures de lit. D'un autre côté, on

la stabilité; et l'eau, fidele aux lois qu'on lui aurait prescrites, renfermée dans les bornes qu'on lui aurait marquées, ne pourrait ni diminuer ni agrandir l'aire de sa section : c'est tout au plus ce que l'art peut se promettre dans les conduites artificielles qu'on pratique pour mener des eaux claires et vives, en les renfermant dans des tuyaux solides; mais les fleuves, les rivieres, les canaux, et les ruisseaux, sont sujets à rouler des eaux troubles et chargées de parties hétérogenes, qui ont de la disposition à se précipiter par leur pesanteur spécifique; et le sol dans lequel ils coulent n'a pas assez de consistance ordinairement, pour résister au frottement continuel du fluide en mouvement. Il est vrai que la nature, qui tend en toutes choses à l'équilibre, travaille sans relâche à perpétuer ses ouvrages, en établissant l'égalité entre l'action et la réaction, et en proportionnant les formes et la direction des mouvements à l'espece des agents, et aux circonstances locales qui modifient les efforts. Son action le plus souvent est lente, quoique continuelle; et ce qu'elle n'a pas fait en un siecle, elle l'acheve en plusieurs. Si les lits de nos fleuves ont actuellement quelque stabilité, si l'impétuosité de leur cours ne confond plus nos possessions, nous en sommes redevables au temps qui a creusé de profondes vallées pour les contenir, qui a consolidé et presque pétrifié leurs lits, ou qui leur a permis d'adoucir leur pente, autrefois beaucoup plus rapide. Si l'art peut parvenir en cela à imiter la

nature, ou à hâter l'effet de ses opérations, toujours lentes pour la courte durée de la vie de l'homme, ce n'est que par l'étude de ses lois, et par une juste application des principes aux travaux hydrauliques que nous entreprenons. Continuons donc d'étudier le lit des fleuves, pour apprendre à les appliquer à notre usage, ou à prévenir les accidents dont ils nous menacent.

CHAPITRE II.

De différentes vitesses de l'eau dans un courant uniforme. Comparaison de celles de la surface et du fond.

64. Quand un courant est bien réglé, l'eau y coule uniformément, sans former de rides à sa surface, ni de tourbillons dans son intérieur; et chaque filet a une vitesse propre, qui est constante, et avec laquelle il glisse entre les filets supérieurs et les inférieurs. La vitesse moyenne de ce courant est celle qui, multipliée par chaque point de la section, donne un produit égal à la somme des produits de chaque point par sa vitesse particulière; c'est celle que nous avons considérée jusqu'à présent comme la plus importante à connaître, et la seule peut-être à laquelle le calcul puisse s'appliquer avec exactitude. Cette vitesse existe en quelque lieu du lit; mais elle est con-

fondue avec un nombre infini d'autres qui la surpassent, ou qui sont moindres qu'elles. Le lieu où elle se trouve située dans le lit n'est point connu, et ne peut être déterminé par l'expérience; il varie autant que la figure du lit. Peut-être parviendrait-on, par des observations réitérées, à fixer le point du rayon où elle est placée dans la section réguliere et constante d'une conduite circulaire; mais il n'en résulterait vraisemblablement aucun avantage réel pour la théorie; et cette connaissance, bornée à ce seul cas, ne nous apprendrait pas où se trouve la vîtesse moyenne dans tous les autres lits irréguliers.

65. Quand le mouvement de l'eau est parvenu à l'uniformité dans un tuyau incliné, le filet qui répond à l'axe est celui qui se meut le plus vîte, parce qu'il est le plus éloigné de la cause qui retarde le mouvement, qui est la paroi. Si on imagine plusieurs cercles concentriques entre le centre et la paroi intérieure du tuyau, tous les filets placés dans la circonférence d'un de ces cercles auront la même vîtesse; mais les vîtesses, dans ces différents cercles décroîtront à mesure que les rayons augmenteront; et cette diminution croîtra toujours jusqu'au cercle qui touche la paroi, dans lequel la vîtesse sera la plus petite de toutes.

Si l'on supprime le demi-cylindre supérieur de ce tuyau incliné, où le mouvement est uniforme, il restera un lit ouvert, dont la section sera un demi-cercle, et les choses resteront dans

le même état qu'auparavant ; la vîtesse moyenne ne changera pas, puisque la pente et le rayon moyen n'ont pas changé ; mais la vîtesse de l'axe sera représentée par celle du milieu de la surface du nouveau lit, et celle à la paroi le sera par celle du fond, ou par toute autre prise à un point quelconque du lit.

En considérant les vîtesses sous ce rapport, il paraît qu'après la connaissance de la vîtesse moyenne, il n'en est point de plus intéressante que celle du milieu de la surface du courant, et celle qui lui répond à la paroi ou au fond, dans la même verticale. La mesure des autres vîtesses prises dans l'intérieur de la veine fluide, ne servirait à rien, et celles des vîtesses à la paroi dans tout autre point qu'au milieu du fond, serait si difficile à prendre avec précision, qu'on ne pourrait gueres compter sur son exactitude. Nous nous sommes donc uniquement attachés à observer quelles étaient les vîtesses de l'eau à la surface et au fond, en même temps que la vîtesse moyenne nous était connue par la dépense divisée par la section, et nous avons répété ces observations dans des lits rectangulaires et trapezes très-variés. On verra dans le détail des expériences quels ont été les résultats. Il suffit de dire ici que l'expérience a encore confirmé l'hypothese que nous avons adoptée touchant le frottement (37). Quand les vîtesses moyennes sont peu considérables, les vîtesses à la surface, qui sont moins retardées par l'effet du frottement, sont en grand

rapport avec celles du fond; à mesure que les vîtesses moyennes croissent, ce rapport dimi nue, et il ne parviendrait sans doute à l'égalité que dans des vîtesses infinies. Une chose étonnante, c'est que ni la grandeur du lit, ni celle de la pente, n'influent en rien sur le rapport des différentes vîtesses dont nous parlons : tant que les vîtesses moyennes restent les mêmes, ou que celle à la surface est constante, on trouve constante celle du fond, sans que la profondeur de l'eau ou la grandeur de la section y apportent de changement. L'expérience seule pouvait démontrer l'existence de cette loi, que la théorie n'aurait osé imaginer, non plus que l'égalité de rapport arithmétique, que nous avons observée entre la vîtesse à la surface et la vîtesse moyenne, et entre celle-ci et la vîtesse du fond.

66. Il résulte de nos expériences, 1° que la vîtesse à la surface étant connue, si on extrait la racine quarrée de cette vîtesse par seconde, exprimée en pouces, et qu'on en retranche l'unité, cette quantité, élevée au quarré, sera la valeur de la vîtesse de l'eau au fond du lit. 2° Que la vîtesse moyenne est moyenne arithmétique entre la vîtesse à la surface et celle du fond.

Nommons v la vîtesse à la surface, U la vîtesse au fond, et V la vîtesse moyenne, on aura les deux équations $U = (\sqrt{v} - 1)^2$, et $V = \frac{v+U}{2}$.

En combinant ces deux équations, on a les six équations suivantes, qui servent à déterminer chaque vîtesse en valeur d'une des deux autres.

$v = (\sqrt{V - 0{,}25} + 0{,}5)^2$ et $v = (\sqrt{U} + 1)^2$

$V = (\sqrt{v} - 0{,}5)^2 + 0{,}25$ et $V = (\sqrt{U} + 0{,}5)^2 + 0{,}25$

$U = (\sqrt{v} - 1)^2$ et $U = (\sqrt{V - 0{,}25} - 0{,}5)^2$.

67. On trouve aussi $v - U = 2\sqrt{V - 0{,}25}$, et $v - V = V - U = \sqrt{V - 0{,}25}$, c'est-à-dire, que les différences entre les vîtesses à la surface et celles au fond, croissent comme les racines quarrées des vîtesses moyennes, diminuées d'une petite quantité constante, ainsi que nous l'avons déja vu ci-dessus (50).

Voici, d'après ces différentes formules, une table des vîtesses au fond du lit, et des vîtesses moyennes, calculées d'après celles à la surface. La premiere colonne comprend les vîtesses uniformes à la surfaee, et au milieu de la largeur d'un courant, depuis un pouce jusqu'à 100 pouces par seconde. La seconde exprime la valeur de la racine quarrée de ces vîtesses, qu'il faut diminuer de l'unité, pour qu'en l'élevant au quarré, elle donne la valeur de la vîtesse au fond, qui est contenue dans la troisieme colonne. Enfin la quatrième montre quelles sont les vîtesses moyennes uniformes qui répondent, dans un même lit, aux précédentes.

Table des vîtesses au fond d'un lit quelconque, et des vîtesses moyennes de ce lit, correspondantes à celles de la surface, croissantes depuis 1 *jusqu'à* 100 *pouces par seconde.*

VALEURS de *v*, ou de la vitesse uniforme à la surface.	VALEURS de $\sqrt{v}$.	VALEURS de U, ou de la vitesse au fond du lit.	VALEURS de V, ou de la vitesse moyenne uniforme du courant.
po.		po.	po.
1...	...1,0000...	...0,0000...	...0,500
2...	...1,4142...	...0,17156..	...1,0808
3...	...1,732....	...0,5365...	...1,768
4...	...2,000....	...1,0000...	...2,500
5...	...2,236....	...1,5257...	...3,263
6...	...2,449....	...2,1000...	...4,050
7...	...2,646....	...2,7093...	...4,854
8...	...2,828....	...3,3416...	...5,670
9...	...3,000....	...4,000....	...6,500
10...	...3,162....	...4,6742...	...7,337
11...	...3,317....	...5,3685...	...8,184
12...	...3,464....	...6,0713...	...9,036
13...	...3,605....	...6,7860...	...9,893
14...	...3,741....	...7,5131...	..10,756
15...	...3,871....	...8,2541...	..11,622
16...	...4,000....	...9,0000...	..12,500
17...	...4,123....	...9,7531...	..13,376
18...	...4,242....	..10,4628...	..14,231
19...	...4,359....	..11,2828...	..15,141
20...	...4,472....	..12,0548...	..16,027
21...	...4,582....	..12,6736...	..16,837
22...	...4,690....	..13,6161...	..17,808
23...	...4,795....	..14,4020...	..18,701
24...	...4,898....	..15,1944...	..19,597

Valeurs de v, ou de la vitesse uniforme à la surface.	Valeurs de $\sqrt{v}$.	Valeurs de U, ou de la vitesse au fond du lit.	Valeurs de V, ou de la vitesse moyenne uniforme du courant.
po.		po.	po.
25	5,000	16,0000	20,500
26	5,099	16,8018	21,401
27	5,196	17,6064	22,303
28	5,292	18,4212	23,210
29	5,385	19,2282	24,114
30	5,477	20,0435	25,022
31	5,567	20,8574	25,924
32	5,656	21,6783	26,839
33	5,744	22,5055	27,753
34	5,831	23,3385	28,669
35	5,916	24,1670	29,583
36	6,000	25,0000	30,500
37	6,082	25,8267	31,413
38	6,164	26,6669	32,333
39	6,245	27,5100	33,255
40	6,324	28,3450	34,172
41	6,403	29,1924	35,096
42	6,480	30,0304	36,015
43	6,557	30,8802	36,940
44	6,634	31,7420	37,871
45	6,708	32,5812	38,790
46	6,782	33,4315	39,716
47	6,856	34,2927	40,646
48	6,928	35,1312	41,570
49	7,000	36,0000	42,500
50	7,071	36,8570	43,428
51	7,141	37,7119	44,356
52	7,210	38,5641	45,282
53	7,280	39,4384	46,219
54	7,347	40,2844	47,142
55	7,416	41,1650	48,082

VALEURS de v, ou de la vitesse uniforme à la surface.	VALEURS de $\sqrt{v}$.	VALEURS de U, ou de la vitesse au fond du lit.	VALEURS de V, ou de la vitesse moyenne uniforme du courant.
po.		po.	po.
56....	...7,482....	...42,0163..	...49,008
57....	...7,555....	...42,9670..	...49,984
58....	...7,616....	...43,7714..	...50,886
59....	...7,681....	...44,6357..	...51,818
60....	...7,746....	...45,5085..	...52,754
61....	...7,810....	...46,3761..	...53,688
62....	...7,874....	...47,2588..	...54,629
63....	...7,938....	...48,1358..	...55,568
64....	...8,000....	...49,0000..	...56,500
65....	...8,062....	...49,8718..	...57,436
66....	...8,124....	...50,7513..	...58,376
67....	...8,186....	...51,6386..	...59,319
68....	...8,246....	...52,5045..	...60,252
69....	...8,307....	...53,3922..	...61,196
70....	...8,367....	...54,2727..	...62,136
71....	...8,426....	...55,1454..	...63,072
72....	...8,485....	...56,0252..	...64,012
73....	...8,544....	...56,8619..	...64,932
74....	...8,602....	...57,7904..	...65,895
75....	...8,660....	...58,6866..	...66,843
76....	...8,718....	...59,5675..	...67,784
77....	...8,775....	...60,4506..	...68,725
78....	...8,832....	...61,3402..	...69,670
79....	...8,888....	...62,2094..	...70,605
80....	...8,944....	...63,1071..	...71,553
81....	...9,000....	...64,0000..	...72,500
82....	...9,055....	...64,8830..	...73,441
83....	...9,111....	...65,7800..	...74,390
84....	...9,164....	...66,6509..	...75,325
85....	...9,220....	...67,5684..	...76,284
86....	...9,274....	...68,4590..	...77,229

VALEURS de v, ou de la vîtesse uniforme à la surface.	VALEURS de $\sqrt{v}$.	VALEURS de U, ou de la vîtesse au fond du lit.	VALEURS de V, ou de la vîtesse moyenne uniforme du courant.
po.		po.	po.
87. . . .	. . . 9,327	. . . 69,3389 . .	. . . 78,169
88. . . .	. . . 9,380	. . . 70,2244 . .	. . . 79,112
89. . . .	. . . 9,434	. . . 71,1323 . .	. . . 80,066
90. . . .	. . . 9,486	. . . 72,0122 . .	. . . 81,006
91. . . .	. . . 9,539	. . . 72,9145 . .	. . . 81,957
92. . . .	. . . 9,590	. . . 73,7881 . .	. . . 82,894
93. . . .	. . . 9,644	. . . 74,7187 . .	. . . 83,859
94. . . .	. . . 9,695	. . . 75,6030 . .	. . . 84,801
95. . . .	. . . 9,747	. . . 76,5100 . .	. . . 85,755
96. . . .	. . . 9,796	. . . 77,3696 . .	. . . 86,685
97. . . .	. . . . 9,849 . . .	. . . 78,3048 . .	. . . 87,652
98. . . .	. . . 9,899	. . . 79,1922 . .	. . . 88,596
99. . . .	. . . 9,951	. . . 80,1204 . .	. . . 89,560
100. . . .	. . . 10,000 . . .	. . . 81,0000 . .	. . . 90,500

68. On n'a poussé cette table que jusqu'à une vîtesse de cent pouces par seconde, parce qu'il est rare de trouver des vîtesses plus grandes dans la pratique. Si on les compare aux résultats des expériences que nous avons faites sur des vîtesses à la surface, depuis 6 pouces jusqu'à 48, et dont nous rendrons compte plus bas (389), on verra que les vîtesses moyennes et celles du fond, calculées d'après nos formules, et comprises dans la table, suivent la même marche que celles de la nature, et n'en different que par une suite des légeres erreurs qui se glissent dans des expériences aussi délicates.

La régularité du rapport entre les trois vîtesses que nous considérons, quelque grandeur qu'ait le lit, quelque variée que soit la figure, quelque inégales que soient les pentes, est si surprenante, qu'on peut croire qu'elle n'aurait lieu, à la rigueur, que dans des lits absolument réguliers comme le cercle; et néanmoins l'expérience montre qu'elle a lieu, du moins sensiblement, dans ceux où la largeur était 6 et 7 fois aussi grande que la profondeur.

Quoique nous n'ayons pas déterminé, d'après l'observation, en quel lieu de la profondeur verticale d'un courant se trouve la vîtesse uniforme moyenne, on peut cependant conclure des expériences 119 et 120, que quand la vîtesse moyenne est bornée, elle se trouve assez près du fond, vers le $\frac{1}{5}$ ou le $\frac{1}{4}$ de cette profondeur; mais il est probable que dans les grandes vîtesses elle est située plus haut, quoiqu'elle ne puisse jamais être au milieu, à moins que la vîtesse moyenne étant infinie, celles de la surface et du fond ne lui soient sensiblement égales.

69. La connaissance du rapport des trois vîtesses principales d'un courant quelconque peut être d'une grande utilité dans la pratique, car il est presque toujours aisé de mesurer avec une certaine précision celle du milieu de la surface, et cette mesure mene à la connaissance des deux autres, et par conséquent de la dépense, en y ajoutant la mesure de la section. Si on mesurait aussi le développement de la paroi du lit, on

pourrait encore, par le moyen de la formule (51), calculer la pente du lit, ou, si la pente était connue, ainsi que la vîtesse à la surface, et la largeur moyenne du courant, on en conclurait la profondeur. Ces conséquences sont si visibles, qu'il n'est pas nécessaire de s'y arrêter. Quant à la vîtesse au fond du lit, elle paraît d'abord moins importante à connaître, mais elle a une influence si intéressante sur l'action que le courant exerce contre son lit, pour le creuser et l'élargir, ou pour laisser former au contraire des dépôts et des attérissements, qu'on n'aurait sans elle qu'une idée fort imparfaite de la maniere dont les fleuves et les rivieres travaillent leur lit, et en proportionnent les dimensions à la quantité d'eau qu'ils ont à écouler, et à la pente qu'ils peuvent prendre pour se rendre dans la mer; c'est ce qui va nous occuper dans les chapitres suivants.

CHAPITRE III.

De l'action réciproque que le lit et le courant exercent l'un sur l'autre. Expression générale de la résistance.

70. Si le lit d'un fleuve modere et fixe la vîtesse de ses eaux, en leur communiquant son inertie, le courant, à son tour, exerce sur le lit une action à laquelle il ne peut pas long-temps résister, si la vîtesse du fond est trop grande, et que

le sol qui compose le lit soit de nature à céder à son action : dans le cas contraire, c'est-à-dire si la vîtesse est trop petite, et que l'eau du fleuve se trouve, habituellement ou par intervalles, chargée de limon et d'autres matieres hétérogenes, spécifiquement plus pesantes que l'eau, ces matieres forment dans le lit un dépôt qui le releve, et qui tend à en diminuer la section. Il y a une variété infinie dans la nature des terrains qui forment le lit des rivieres : tantôt c'est de l'argile, dont la qualité varie beaucoup, selon les pays; tantôt c'est de la glaise; ici c'est un gros sable anguleux et rude; là c'est un sable arrondi ou plus fin : beaucoup de rivieres coulent sur du gravier, dont les petites masses varient par la grosseur, la pesanteur et la figure; d'autres roulent sur des galets et des pierres à fusil; il y en a enfin dont le lit paraît avoir été originairement creusé dans un sol argileux ou calcaire, qui s'est pétrifié à la longue, et qui a aujourd'hui toute la dureté du rocher.

A chaque nature de terrain répond une inertie plus ou moins grande, qui peut résister à une vîtesse de courant donnée, qui céderait à une plus grande, et qui l'emporterait sur une plus petite. Si la vîtesse est trop grande, le lit se creusera et s'élargira; si elle est exacte, il aura de la stabilité; si enfin elle est trop petite, l'eau trouble y déposera son limon.

71. Nous avons fait plusieurs expériences, pour déterminer à quelles vîtesses sont capables de

résister ou de céder différentes natures de terrain, dont nous avons fixé la pesanteur spécifique. On trouvera ces expériences ci-dessous (399). Il en résulte, 1° que l'argile brune, propre à la poterie, quoique spécifiquement plus pesante que toutes les autres matieres, ne commence à résister à l'action du courant que quand la vîtesse du fond est d'environ 3 pouces par seconde, ou celle de la surface de 8 pouces. La facilité avec laquelle l'eau l'attaque, vient sans doute de la grande ténuité de ses parties, qui offrent plus de surface à proportion que de masse. 2° Le sable fin commence à résister à une vîtesse de 6 pouces au fond, ou de 12 pouces à la surface. 3° Le gros sable anguleux a de la stabilité, quand la vîtesse au fond est moindre que 8 pouces. 4° Le gravier de la Seine, séparé en trois classes, de fin, moyen et gros, a de la stabilité aux vîtesses correspondantes de 4 pouces, 7 pouces, et 12 pouces. 5° Les galets arrondis, d'un pouce de diametre, résistent à une vîtesse de 24 pouces; et enfin, 6° le silex anguleux, du volume d'un œuf, résiste à une vîtesse de 36 pouces.

72. La maniere dont l'eau courante travaille le fond de son lit, quand il est de nature à lui céder, et dont se fait le transport du sable qu'elle charie avec elle, est tout-à-fait admirable, et mérite d'être rapportée. Tantôt c'est un tourbillon qui emporte la terre et le sable fin, comme le vent emporte la fumée; et cet effet a lieu quand la vîtesse est assez grande pour que le choc du fluide

soit pleinement victorieux de l'inertie des molécules solides; tantôt c'est un travail réglé, plus paisible, et pour ainsi dire méthodique, qu'on peut admirer comme un chef-d'œuvre de dynamique. Je vais essayer d'en donner une idée.

Lorsque la vîtesse au fond du lit est assez grande pour faire glisser ou rouler des corps spécifiquement plus pesants que l'eau, ces corps ne sont point entraînés d'une maniere uniforme, mais ils cheminent, pour ainsi dire, par relais. Prenons le sable pour exemple. Quand le fond du lit est de sable un peu gros et bien visible, et que la vîtesse s'y trouve de 10 à 12 pouces par seconde, il offre aux yeux le dessein de ces tapisseries, connues sous le nom de point de Hongrie, en présentant des sillons irréguliers, dont la direction est perpendiculaire au cours de l'eau. Chacun de ces sillons est composé de deux glacis à pente opposée; celui qui regarde le côté d'où vient l'eau est une pente fort allongée, dont le sommet est commun à l'autre pente plus roide, qui regarde le côté d'aval. Le profil d'un sillon est assez ressemblant à celui du glacis et du chemin couvert d'une place de guerre. A peu de distance du pied du talus le plus roide, commence la rampe douce d'un autre sillon, et ainsi de suite en descendant. Un grain de sable, poussé par le courant, monte la pente douce du premier talus, et étant arrivé au sommet, il roule par son propre poids du haut en bas du talus opposé; là il demeure en repos, à l'abri de l'action du fluide, et il est recouvert

par d'autres grains, qui viennent à leur tour. Ce travail ressemble assez à celui des terrassiers qui roulent la brouette, en montant avec leur charge la rampe du remblai, pour la verser au sommet, et en faire rouler les terres du haut en bas : ces grains de sable, ainsi enterrés, restent en repos, chargés et recouverts par les derniers venus, jusqu'à ce que toute la masse du sillon, qu'ils avaient laissé en arriere, ait passé en détail au-dessus d'eux. C'est ainsi que le sillon tout entier se déplace en détail, en avançant peu-à-peu d'un espace égal à sa largeur : alors, le grain dont je parle se trouve au pied du nouveau glacis qui s'est formé en avant de lui ; et comme il s'y trouve de nouveau exposé à l'action de l'eau, il monte ce glacis, et se précipite de nouveau, comme la premiere fois en bas du remblai. Tandis qu'un sillon chemine ainsi fort lentement, tous les autres en font autant, et si la vîtesse de l'eau est modérée, il ne faut pas moins d'une demi-heure, pour que chacun fasse ce pas progressif, qui est de 4 à 5 pouces. Si la vîtesse de l'eau augmente, l'ouvrage se fait avec plus de diligence, et il se ralentit au contraire quand elle diminue. Ainsi, dans un travail moyen, il faut environ deux ans pour qu'un grain de sable parcourre une lieue de deux mille quatre cents toises.

73. Les molécules les plus déliées du sable fin et de l'argile étant emportées avec moins de ménagement par le courant, le fond du lit se trouve garni du sable le plus gros, des petits cailloux,

des pierres et des masses les plus volumineuses, qui tombent et s'arrêtent dans le le fond du lit, et y forment souvent une couche solide, dont la résistance oblige le courant à élargir son lit, ou même à se déplacer tout-à-fait, s'il trouve moins de résistance de droite et de gauche. C'est presque toujours de ce principe, c'est-à-dire de l'amas des graviers ou de pierres dans le fond du lit, que naissent ses déplacements; et cela est inévitable, lorsque le terrain n'est pas parfaitement homogène. . . .

74. Il nous reste à examiner comment on peut évaluer en poids la résistance que l'eau éprouve de la part de son lit, ou l'effort que fait un courant contre son lit, dans le sens du mouvement, pour l'entraîner avec lui, s'il ne résistait pas à cet effort par son inertie.

Il suit du principe fondamental (20), que quand l'eau se meut uniformément dans un lit, la résistance totale qu'elle y éprouve est égale à sa force accélératrice : or, cette force accélératrice est égale au poids de toute la masse en mouvement, multiplié par la fraction qui exprime la pente du lit; la masse est représentée par la section, multipliée par le dénominateur de la fraction qui exprime la pente. Or, le rayon moyen étant égal à la section divisée par la paroi, il est clair que la section est égale au produit du rayon moyen par la paroi; ainsi, nommant p la paroi, et r le rayon moyen, la section est exprimée par rp; la masse en mouvement est exprimée par rpb ; et

la force accélératrice, ou la résistance, est exprimée par $\frac{rpb}{b} = rp$. Telle est l'expression de la résistance sur toute la longueur b. Mais si l'on ne considere cette résistance que sur une longueur égale à l'unité, pour avoir sa nouvelle valeur, il faudra diviser par b la quantité rp, ce qui donne l'expression de la résistance $\frac{rp}{b}$. Enfin, si on ne considere la résistance que sur une largeur de paroi égale à l'unité, il faudra diviser par p l'expression $\frac{rp}{b}$; ainsi, cette résistance, en prenant le pouce pour l'unité, sera exprimée pour un pouce quarré, par le poids d'un volume d'eau qui aurait pour base un pouce quarré, et une hauteur égale à $\frac{r}{b}$; et si on nomme S une surface quelconque de paroi, exprimée en pouces quarrés, et F le frottement improprement dit, on aura $F = \frac{Sr}{b}$.

Je dis que telle est la valeur du frottement improprement dit, parce que la résistance totale, représentée par ce poids, est composée du frottement, de l'attraction des parois, et de l'effet de la viscosité du fluide; d'où il arrive que, dans les grandes vîtesses, la résistance dans les grands lits est moindre que dans les petits, à même vîtesse et même surface de paroi; et qu'au contraire, dans les petites vîtesses, la résistance dans les grands lits est plus grande que dans les petits, pour une surface de parois et une vîtesse égales : c'est ce qu'on peut remarquer, en comparant deux à

deux les expériences 12 et 71, 50 et 113; 53 et 124 du tableau précédent (55).

CHAPITRE IV.

Établissement du lit des rivières. Des accrues permanentes. Régime du lit. Des accrues accidentelles ou périodiques.

75. On sait qu'un fleuve est le canal que la seule nature a creusé, pour écouler à la mer toute l'eau des sources, et une partie de l'eau des pluies qui arrosent la surface du terrain, dont la pente naturelle conduit ces eaux, ou directement dans le fleuve dont nous parlons, ou dans les rivieres, les ruisseaux et les torrents qui viennent s'y décharger, sur toute la longueur de son cours; tellement que ce fleuve grossit toujours à mesure qu'il s'éloigne de sa source, et qu'il s'approche de la décharge commune de toutes les terres hautes.

Quand on considere la largeur et la profondeur des vallées, au fond desquelles coulent aujourd'hui les rivieres de tout le globe, on s'apperçoit aisément qu'elles ont été creusées petit à petit par les eaux courantes, et que si leur lit a maintenant quelque stabilité, il ne la doit qu'à un travail énorme, fait par les eaux qui ont coulé sans interruption, depuis un terme très-éloigné,

que les historiens sacrés nous apprennent être de quatre mille ans, c'est-à-dire, depuis le bouleversement général de la surface du globe par le déluge. Sans adopter aucun systême particulier, il est très-certain que la surface des terres hautes, ou élevées au-dessus du niveau de la mer, change continuellement, et que le sol sur lequel nous marchons aujourd'hui n'est pas celui que nos ancêtres foulaient aux pieds. Les pluies du ciel entraînent dans les vallons, ou précipitent dans les torrents, une partie de la terre qui couvre les hauteurs et les côteaux; les torrents charient ce limon dans les rivieres, les rivieres dans les fleuves, et enfin les fleuves dans la mer, où cette graisse de la terre, absorbée et engloutie dans les eaux, est perdue pour la végétation. Ainsi, les collines s'abaissent, les vallées se comblent, les montagnes découvrent le roc de leurs entrailles; et les terrains bas, relevés et nourris pour quelque temps de la substance des terres hautes, iront, à leur tour, mais plus tard, s'abymer dans l'Océan. La terre alors, réduite à un niveau effrayant, ne présentera plus dans l'avenir qu'un marais immense et inhabitable, et si nous sommes encore éloignés du terme où arrivera cette catastrophe, que le travail de tout le genre humain à-la-fois ne peut empêcher, nous n'en sommes redevables qu'au peu d'antiquité du monde, qui ne vieillit que par des degrés lents, mais à la nature duquel il répugne d'avoir toujours été, ou de devoir être toujours.

76. La surface de la terre n'avait donc point, dans ces temps reculés, comme de nos jours, ces grands canaux, ces vastes décharges, toujours prêtes à écouler les eaux de pluie, que l'aridité de la terre n'absorbe qu'en partie, et nourries en tout temps, quoique moins abondamment, des sources d'eau pure qui coulent du pied des montagnes; les rivieres et les fleuves n'existaient pas encore, ou n'étaient tout au plus que des torrents, dont l'eau, rassemblée dans les vallons, cherchait une issue pour s'échapper. De là naissait une multitude de lacs dans l'intérieur des continents, tels qu'on en voit encore plusieurs dans l'Amérique septentrionale: les plus éloignés de la mer, ne pouvant plus contenir leurs eaux, reversaient, par un trop plein, dans les bassins inférieurs, ceux-ci, à leur tour, se versaient dans d'autres, et ainsi de suite jusqu'aux derniers qui avoisinaient la mer. La communication d'un bassin à l'autre était ouverte par un courant plus ou moins rapide; et le sol, déchiré par ce courant, présentait l'ébauche d'un lit qui s'approfondissait de plus en plus: mais les eaux de plusieurs bassins, réunies et coulant ensemble en grand volume, devaient avoir, à pentes égales, beaucoup plus de vîtesse et de violence que celles des bassins reculés dans les terres; et la somme de tous les courants réunis dans le bassin le plus voisin de la mer, après avoir surmonté et rompu sa digue naturelle, devait former un torrent prodigieux, qui creusait un lit d'autant plus profond, que l'eau avait plus de masse et plus de pente.

La formation des vallées, creusées par le cours de ces torrents, donna lieu à beaucoup de sources, qui n'existaient point auparavant, faute d'issue; et les lacs ne purent être desséchés que lorsque la digue qui les séparait s'est trouvée suffisamment approfondie, pour en laisser le fond à sec.

De cette disposition assez naturelle il résulte que, dans l'ébauche du lit des fleuves, ces lits durent s'approfondir d'autant plus, qu'ils avaient, en approchant de la mer, de plus grands volumes d'eau de pluie ou de sources à écouler, et qu'au contraire à leur origine, vers le milieu des continents, ils se creusaient moins que par-tout ailleurs : ainsi, au point de départ des eaux, que la pente naturelle du terrain porte vers une riviere, le sol ne peut baisser que par l'applanissement des montagnes et des pays élevés : or, la cause qui produit cet applanissement doit avoir des effets très-lents, parce qu'elle ne consiste que dans le travail périodique des eaux de pluie ou de source, qui creusent mille petits ruisseaux sur la pente des hauteurs; mais à mesure que les fleuves, grossis par la réunion de plusieurs rivieres, avancent vers la mer, ils ont plus de force pour creuser leur lit, et pour en égaler le fond au niveau de la mer même.

77. Le lit des fleuves, celui même des rivieres, ne forme donc pas un plan incliné uniforme, en le considérant depuis la source jusqu'à l'embouchure; mais c'est l'assemblage de plusieurs plans inclinés contigus, dont les pentes vont toujours en décroissant vers la mer.

Soit, par exemple, le fleuve SABCDEF, dont la source est en S, et qui reçoit différents ruisseaux ou petites rivieres *ga*, *hb*, *ic*, *kd*, *le*: si on imagine une coupe longitudinale du terrain, suivant le développement du lit de ce fleuve, la ligne SA représentera le lit du premier torrent vers sa source. Depuis le point A, où se fait le premier confluent du premier ruisseau *ga*, jusqu'au confluent B du deuxieme ruisseau, le lit sera représenté par AB; de là jusqu'au troisieme ruisseau, le lit sera BC, et ainsi de suite CD, DE, EF, jusqu'à l'embouchure.

Par succession de temps, chaque torrent, *ga*, *hb*, etc., sera devenu un ruisseau, puis une petite riviere, formée par la somme de tous les torrents et de toutes les sources qui labourent continuellement les côteaux; et peu-à-peu chaque riviere, en se rendant dans le fleuve principal, aura donné à la pente de son lit une courbure proportionnellement semblable à celle SABCDEF du fleuve.

On sent bien que la nature du terrain où se creusent les lits des eaux courantes, étant très-variée, elle aura mis les mêmes variétés dans les pentes de ces lits; mais, hors les cas particuliers, voilà la marche générale qu'auront suivie les fleuves et les rivieres dans l'établissement de leurs lits.

78. Cela posé, on peut demander quelles sont les circonstances nécessaires, où il faut qu'un fleuve se trouve pour cesser de creuser son lit, et

pour avoir de la stabilité. Nous allons examiner cette question, après avoir défini ce que nous devons entendre par le mot de *stabilité* ou de *régime*, et avoir distingué deux sortes d'accrues auxquelles sont sujets les fleuves et les rivieres.

Nous disons qu'un fleuve, une riviere, ou en général un courant d'eau, a de la stabilité, ou que sa vîtesse est celle d'un régime exact, lorsque, dans le temps des plus grandes crues auxquelles il est sujet, sa rapidité est telle que la ténacité du terrain dont le lit est formé fait équilibre à son action, et s'oppose à sa corrosion, non-seulement vers le fond du lit, mais encore au bord et au talus de ses rives. Si le courant trop rapide détache et emporte avec lui quelques parcelles de sable, de terre, de gravier, ou même de pierre, nous disons que la vîtesse est plus grande que celle du régime, c'est-à-dire que le lit tend à s'approfondir ou à s'élargir : si au contraire la consistance du terrain est plus que suffisante pour résister au frottement du courant, la vîtesse alors est plus petite que celle du régime, et le lit tend à se combler ou à se rétrécir, pour peu que l'eau charie avec elle des matieres propres à s'y déposer. Ainsi, par le terme de *régime*, nous entendons proprement une vîtesse de courant relative à la résistance du terrain qui forme le lit; d'où l'on doit conclure qu'il y a autant de régimes qu'il y a de natures de terrains propres à opposer plus ou moins de résistance au courant de l'eau. Ainsi, le régime du Rhône, qui coule sur un lit recou-

possible; car il consiste principalement dans l'effet des chûtes, des cataractes, ou au moins des cascades qui se forment d'elles-mêmes dans tout lit qui a trop de pente; le fond se creuse et s'abaisse, tandis que les bords restent à pic, jusqu'à ce qu'il se fasse des éboulements qui précipitent les rives dans le courant: les terres éboulées, ameublies et détrempées, sont bientôt emportées par l'eau: le lit continue à s'approfondir; les rives croulent de nouveau; la vallée se forme; mais la section du courant, toujours resserrée dans le fond, ne peut acquérir que peu de largeur; elle reste donc à-peu-près semblable à la figure du trapeze dont nous avons parlé (60), et c'est sous cette forme que le régime commence à s'établir depuis *f* jusqu'en *e*.

Quant au lit supérieur *ed*, sa dépense sera diminuée de toute la quantité d'eau de la riviere *le*; il devra aussi prendre la même forme, mais son aire diminuera, afin que la vîtesse reste constante; et le rayon moyen étant plus petit dans cette partie que dans l'inférieure *ef*, il faudra que la pente reste plus grande. En faisant le même raisonnement pour les lits supérieurs, on voit que la pente du lit *cd* sera plus grande que celle du lit *de*; que celle du lit *bc* sera encore plus grande que celle du lit *cd*; et ainsi de suite, à mesure que par la suite des temps le régime s'établira progressivement, en s'éloignant de la mer, et en s'approchant de la source.

Mais s'il survient, comme il n'en faut pas dou-

ter, des accrues accidentelles, causées par les pluies du ciel, elles doivent apporter du changement à cette marche méthodique des crues permanentes; comme leur effet principal est d'augmenter la vîtesse du courant, elles hâtent l'approfondissement du lit, et la diminution de la pente: mais quand le régime des crues permanentes est établi, ces crues accidentelles doivent élargir le lit, sans presque l'approfondir, du moins d'une maniere durable, et cela par trois raisons. 1° Parce les roseaux et différentes sortes d'herbes aquatiques ayant poussé et jeté leurs racines dans le fond du lit, pendant l'intervalle des crues périodiques, ils en tapissent la paroi, lorsqu'un courant plus impétueux vient à les coucher sur ce fond, et le préservent ainsi de la corrosion de l'eau. 2° Parce que, si dans toute la masse du terrain, dont le fleuve est parvenu à faire à la longue une vallée, il s'est trouvé des pierres ou du gravier, plus propres à résister au lavage des eaux que l'argile ou le sable, ces matieres se seront déposées dans le fond du lit, en lui donnant une consistance que les bords, composés de terre vierge, ne peuvent avoir. 3° En supposant même que la violence de l'accrue périodique ait un peu approfondi le lit, lorsque cette accrue sera passée, le régime se rétablira par le dépôt du limon le plus délié, que le fleuve chariera encore; et la largeur du lit restera augmentée en plus grand rapport que la profondeur.

80. Concluons donc que le lit d'une riviere ne

peut avoir de stabilité réelle, que lorsqu'il est capable d'écouler toutes les eaux des crues extraordinaires, avec une vîtesse égale à celle qui convient à la ténacité du sol de son fond et de ses rives; que, cette ténacité étant communément plus grande dans le fond que dans les berges, la section doit prendre à la longue beaucoup plus de largeur que de profondeur ; que le point où le régime est exact ayant commencé autrefois à l'embouchure, s'avance incessamment, en remontant vers la source ; qu'il y a des rivieres plus formées à cet égard les unes que les autres, mais que le régime ne sera établi, sur tout leur cours, que dans un avenir encore fort éloigné ; que plus le régime fait de progrès, plus les eaux des accrues extraordinaires ou périodiques mettent de temps à arriver vers l'embouchure, et moins au contraire pour se faire sentir au lieu où le régime cesse d'être observé ; et enfin que, hors le temps de ces accrues extraordinaires, le lit peut subsister avec une vîtesse moindre que celle du régime, sans se combler ni se rétrécir sensiblement, parce qu'alors ses eaux sont claires, et ne charient point le limon grossier ; du moins celui qui peut alors s'y déposer est enlevé à chaque accrue qui survient.

CHAPITRE V.

Des sinuosités du lit des rivieres. De la stabilité de la figure du lit dans le cours direct, ou aux coudes.

81. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que le lit des fleuves s'est creusé peu-à-peu dans la terre, le sable, la craie, et même dans les terrains qui sont devenus aujourd'hui du roc, par la succession des temps : la variété de ces terrains, les obstacles différents qui ont résisté au choc de l'eau, ont obligé les rivieres à s'écarter de la rectitude naturelle de leur cours, à former différents contours dans les plaines, à tourner autour des hauteurs qu'elles n'ont pu applanir, à serpenter dans les vallées et dans les prairies. Les lignes droites ne se rencontrent presque jamais dans les opérations libres de l'eau, et les rivieres les plus droites sont celles dont la rapidité ou le volume sont le plus considérables, comme le Danube, le Rhin, le Rhône, le Pô, etc. Les autres sont communément plus tortueuses, suivant la nature des terrains qui se sont trouvés sur leur passage ; mais, comme leur action est continuelle, quoique lente, elles sont parvenues, dans la suite des siecles, à un état de permanence et de stabilité qui éprouve aujourd'hui peu de changements, du moins vers la fin de leur cours, à moins que l'art

des hommes, ou quelque révolution ne les oblige à changer leurs opérations.

82. Tout dans la nature est assujetti à la loi de l'équilibre : cette loi est le modérateur universel du mouvement ; elle se trouve dans la détermination de la vîtesse d'un fleuve, dans l'établissement de son lit, dans la détermination même de la figure de sa section, et de l'angle sous lequel il peut s'écarter de la ligne droite, pour changer la direction de son cours, en formant un coude. Cette matiere est importante par elle-même, et mérite bien d'être approfondie ; car, si on a des travaux à faire au lit des rivieres, s'il s'agit d'une opération qui tende à changer le travail de la nature, il est d'une extrême conséquence de ne point déroger à ses lois, qui sont imprescriptibles, comme leur auteur est immuable ; et l'on est tôt ou tard puni de leur infraction.

83. Je dis d'abord que, dans un régime parfait, le lit a de la régularité dans ses dimensions générales de largeur et de profondeur : si quelque accident vient à troubler l'ordre naturel, l'eau se met aussitôt à l'ouvrage, pour réparer ce désordre : elle travaille sans relâche pour y parvenir, soit en rétablissant toutes choses dans leur premier état, ou en suppléant quelqu'autre forme équivalente ; mais la fin est toujours le rétablissement de l'équilibre. Par exemple, si on suppose que le lit d'une riviere bien réglée vienne à être creusé par une force étrangere, sur une portion de son cours, ou que sa largeur vienne à être augmentée,

sans qu'il soit survenu de changement à la pente générale ; comme sa dépense n'est point augmentée, quoique la section soit devenue plus grande, la vîtesse diminuera nécessairement dans la partie du lit qui se trouvera altérée, et les dépôts successifs des accrues répareront le dommage, et remettront le lit et les berges dans leur état primitif et ordinaire.

Il est vrai qu'on voit quelquefois dans les rivieres la profondeur suppléer à la largeur, ou la largeur à la profondeur ; mais c'est toujours un état forcé, puisqu'alors la pente de la surface de l'eau en est troublée, et qu'elle n'a plus d'uniformité : on est donc fondé, quand cela arrive, à supposer l'existence de quelque obstacle caché, qui oblige l'eau à substituer une des dimensions de son lit à l'autre ; et on peut conclure que le terrain du lit n'est pas homogene. De même, si on voit une rive fort plate, et l'autre beaucoup plus rapide, on peut assurer que l'une est formée d'un terrain sans consistance, et l'autre, d'un sol plus tenace, ou que le fond du lit est irrégulier, et que le courant se jette contre la rive la plus droite, et menace de la miner ; car le lit doit naturellement observer de la régularité dans la symmétrie de la section.

84. J'ai déja dit que la figure naturelle d'un lit creusé dans la terre ne peut pas être rectangulaire, parce que les terres communes ne peuvent se soutenir à plomb, sans s'ébouler, en prenant un talud quelconque : cette raison exclut aussi la

8..

forme demi-circulaire. La forme trapeze, composée de trois lignes droites, offrant des taluds suffisants, sympathise davantage avec la nature des terres; mais l'eau n'aime point les lignes droites; si l'art les emploie, elles sont bientôt attaquées par ce fluide, dont elles gênent l'indépendance, ou recouvertes et ensevelies sous des dépôts de limon qui reproche à l'artiste l'inutilité de son travail. Le fond du lit, formé par la nature, est une courbe qui, à partir du milieu du courant, se releve insensiblement et de plus en plus vers les bords, en proportionnant la roideur de ses pentes à la diminution des vîtesses des filets d'eau, et à l'énergie des molécules du lit qui doivent leur résister.

Si la section du lit était un demi-cercle BCD, la vîtesse en C serait, avec celle en A, dans un rapport qui dépend, comme nous l'avons vu, de l'intensité de la vîtesse même; mais cette vîtesse à la paroi serait la même dans toute la circonférence BCD: or, la rive verticale aux bords D et B, ne peut subsister sans éboulement, d'où il suit que le lit prendra la figure GCEF. Le rapport de la vîtesse aux points A et C pourra demeurer conforme a la loi, mais la vîtesse au point F sera plus petite qu'elle n'était auparavant en D et en C, et celle au point E sera moindre que celle en C, mais plus grande que celle en F. Les vîtesses à la paroi vont donc en décroissant par degrés depuis C jusqu'en F, tandis que la roideur des plans exprimés par la courbe, sur lesquels sont

situées les molécules terreuses qui font le lit, va en augmentant; la vitesse en F reste finie, et l'obliquité du talud qui convient à la nature du terrain reste finie aussi. Ainsi, au point C, c'est-à-dire sur un plan horizontal, les molécules ont plus d'énergie pour résister au choc de l'eau et à ses tournoiements, qui les attaquent quelquefois dans tous les sens; mais aussi la vitesse à la paroi est plus grande qu'ailleurs. Au point E, la pente du plan donne plus d'avantage à l'eau, pour détacher la molécule du lit, et la faire descendre en bas, ou l'emporter avec elle; mais la vitesse est moindre; et ainsi des autres points. Concluons donc qu'afin que la figure de la section soit permanente et durable, il faut que l'inclinaison des plans, dont l'ensemble forme la courbe du lit, soit relative à la vitesse des filets d'eau qui se meuvent le long de ces plans, et à la ténacité du terrain, dont la variété influe sur le parametre de cette courbe.

85. D'après toutes ces considérations, on pourrait douter si le régime exact peut subsister dans le coude d'une riviere, au point où elle se détourne pour prendre une nouvelle direction; peut-être qu'à la rigueur il est impossible que le régime y soit permanent, sur-tout si la riviere est sujette aux accrues périodiques; mais l'expérience prouve que, quand l'eau a travaillé elle-même l'arrondissement d'un coude pendant un grand nombre d'années, toutes choses s'y arrangent de maniere que, par certaines compensations, et suivant certaines lois, qui y sont très-bien observées, ce

coude acquiert une stabilité sensible. Les conditions les plus indispensables pour cela sont renfermées dans la proposition suivante.

PROPOSITION.

86. Pour que le lit d'une riviere ait de la stabilité à l'arrondissement d'un coude, il faut, 1° que la profondeur de l'eau y soit plus grande qu'ailleurs. 2° Que le fil d'eau du milieu du lit, après avoir frappé la digue ou la rive concave de l'arrondissement, soit réfléchi sous le même angle dans la ligne du milieu du lit en-dessous du coude. 3° Que l'angle d'incidence soit proportionné à la ténacité du terrain. 4° Qu'il y ait à ce coude une augmentation de pente, ou une charge capable de vaincre la résistance du coude.

DÉMONSTRATION.

fig. 9. Soit une riviere qui coule dans le lit ABEHL KIMCD, composé de deux parties droites, jointes par un coude arrondi.

Je dis d'abord qu'afin que ce coude ait de la stabilité, il faut que la profondeur de l'eau y soit plus grande que dans les parties droites du lit, au-dessus et au-dessous; car, en considérant comment l'eau doit passer à ce coude, on voit qu'elle trouve une résistance invincible de la part de l'arc concave BEH; mais qu'en trouvant moins vers M, le fil de l'eau doit se détourner de la premiere

direction NV, et se jeter vers VM, en se rapprochant de l'arrondissement convexe, au lieu de poursuivre suivant VE. En effet, si on suppose, comme cela est naturel, que l'eau soit de niveau aux points correspondants B, C; E, M; H, I, on voit que la pente de l'eau, en suivant CMI, est beaucoup plus grande qu'en suivant BEH, et ainsi à proportion dans les autres arcs concentriques, qu'on pourrait tirer dans le lit; d'où il suit, 1° que le courant doit être plus rapide contre la rive convexe CMI; 2° qu'il doit être rétrograde contre la rive concave BEH, où il doit se former un remou ou tournant : considérant ensuite que la vîtesse à la surface ne peut augmenter, ainsi que celle du fond, sans augmenter le frottement et la corrosion, le lit doit s'approfondir du côté de la rive CMI, et le talud de cette rive doit devenir plus plat; il est clair qu'au contraire dans la partie BEH, où le courant est moins rapide et rétrograde, le fond doit se relever, et la rive se soutenir plus roide, de maniere que l'eau y forme ses tournoiements, par la communication du mouvement du courant principal; d'où il résulte que la section du lit, faite par la ligne EM, doit être figurée à-peu-près comme EYWM, fig. 10.
en supposant le lit ordinaire représenté par E*ab*M.

Je dis en second lieu que l'arc BEH doit être fig. 9.
tel que le fil de l'eau NE étant réfléchi sous l'angle GEP=FEN, se trouve placé au milieu du lit inférieur fût EQRM, il s'ensuivrait que le fil de l'eau, réfléchi du point E, irait frapper en S,

coude d'une riviere est stable, il le doit à une certaine ouverture de l'angle de bricole, qui est proportionnée au régime, au-dessus de laquelle le courant attaquerait les rives, et tendrait à changer le lit : il suffit, pour s'en convaincre, d'étudier le cours d'une riviere, dans les coudes où il ne se fait qu'une bricole, ce qui est aisé à connaître ; on verra que, lorsque ces coudes ont de la stabilité, les angles formés à ces coudes ne sont jamais au-dessous d'une certaine ouverture. J'ai observé, par exemple, que dans le lit de l'Escaut, qui est creusé dans l'argile, et où la vîtesse moyenne du courant est de 20 à 30 pouces par seconde, dans le temps de ses crues, les plus petits angles de coude n'ont pas moins de 108 degrés d'ouverture, lorsqu'il ne s'y forme qu'une bricole; ce qui fixe le plus grand angle de bricole, convenable à la stabilité, à 36 degrés; mais il n'y a aucun inconvénient que cet angle soit plus petit, et celui du coude plus ouvert : cette ouverture du plus grand angle de bricole dépend sans doute de la ténacité du terrain ; et après avoir observé celle qui convient à chaque riviere et à chaque nature de terrain, il faut s'y conformer, sans oser courir les risques de faire des angles plus petits que la nature ne l'indique.

91. Si, l'angle de bricole étant toujours donné, ainsi que la largeur de la riviere, le courant formait deux bricoles contiguës, tellement que le
fig. 12. fil de l'eau fût HFGI, l'angle de coude serait égal à 180 degrés, moins quatre fois l'angle de bricole; car (88) l'angle HFG vaut 180 degrés,

moins deux fois l'angle de bricole : ainsi l'angle DFG et son égal DGF valent chacun deux fois l'angle de bricole ; leur somme vaut donc quatre fois l'angle de bricole ; et comme les trois angles d'un triangle valent ensemble deux droits, il suit que l'angle FDG ou son égal K, vaut 180 degrés, moins quatre fois l'angle de bricole. Pour tracer l'arrondissement dans l'ouverture de l'angle connu AKE, on cherchera (88) le rayon qui convient à l'angle de bricole, ou la valeur de CM, et on aura le triangle rectangle MCK, dans lequel deux angles et un côté sont connus. Ainsi, on trouvera le côté KM, qui déterminera le point M, centre de l'arrondissement.

92. Si le coude devait être de trois bricoles contiguës, les deux branches de ce lit, jointes ensemble par l'arrondissement, formeraient ensemble un angle de plus ou moins 180 degrés, moins six fois l'angle de bricole, ainsi de suite pour un grand nombre de bricoles ; d'où on fait la proposition suivante.

PROPOSITION.

Deux branches de lit rectilignes, jointes ensemble par un arrondissement d'un nombre quelconque de bricoles, forment entre elles un angle affecté du signe + ou —, qui est égal à 180 degrés, moins l'angle de bricole, multiplié par le double du nombre des bricoles.

Ainsi, en nommant a l'angle de bricole, c l'angle de coude, et n le nombre de bricoles, on

$a \pm c = 180° - 2na$; d'où l'on tire $a = \frac{180° \pm c}{2n}$.

D'après toutes ces connaissances, on est en état de faire passer les sinuosités d'une rivière par des points donnés quelconques, comme on va voir dans le chapitre suivant.

CHAPITRE VI.

Du tracé des sinuosités des rivières. Problème général des arrrondissements.

93. POUR donner un exemple général, dans lequel se trouvent des sinuosités de toutes les formes, et montrer la maniere dont on peut contourner un lit, pour le faire passer à un point quelconque, pour allonger ou raccourcir son cours, de maniere à ménager sa pente, et à lui donner la vîtesse de régime convenable, et de la stabilité dans ses coudes, nous allons résoudre le problême suivant, dans lequel nous ferons abstraction de sa pente, pour ne nous occuper d'abord que de ses sinuosités. Nous parlerons dans le chapitre septieme de l'augmentation de pente qui est nécessaire pour vaincre la résistance des différentes inflexions du lit, ce qui déterminera le choix qu'on pourrait être obligé de faire entre des développements plus ou moins grands, ou des arrondissements d'un plus grand ou d'un moindre nombre de bricoles.

PROBLÈME.

94. Supposant donné le plus grand angle de bricole qui convient au régime d'une riviere dont la largeur est donnée, tracer les sinuosités de cette riviere sous des angles donnés quelconques, de maniere qu'elles aient de la stabilité.

Soit une riviere ACDEGH, etc., dont la largeur soit l, et qui doit former plusieurs contours, savoir, 1° un coude, sous un angle B de 30 degrés d'ouverture; 2° un arrondissement en demi-cercle, contenant 3 bricoles égales; 3° un arrondissement en poire, contenant 5 bricoles, sous l'angle F de 45 degrés; 4° un coude sous un angle K de 38 degrés; 5° un autre coude sous un angle de 150 degrés; 6° un arrondissement en demi-cercle, contenant 4 bricoles; 7° un arrondissement en poire, contenant 6 bricoles, sous un angle de 36 degrés; 8° un coude sous un angle droit; 9° enfin, un arrondissement mixte, sous différents angles contigus. On suppose aussi que le plus grand angle de bricole relatif au régime soit de 36 degrés; on demande le tracé de cette riviere, et les rayons des différents arrondissements. Fig. 13

SOLUTION.

1° Le premier coude devant se former sous un angle de 30 degrés, il est nécessaire qu'il s'y forme 3 bricoles; car s'il n'y en avait que deux, la formule $a = \frac{180° - c}{2n}$ deviendrait $a = \frac{180° - 30}{4}$;

d'où l'on tire $a = 37\frac{1}{2}$, qui est plus grand que l'angle de régime : ainsi on aura $a = \frac{180° - 30}{6}$; donc $a = 25°$. Nommant donc, comme ci-devant, s le sinus de 12°, 30′, moitié de a, S le sinus total, que nous pouvons supposer égal à 1,00000, et R le rayon de l'arc concave AC, on aura $R = \frac{S^2 l}{4s^2}$; or, $s = 0{,}21643$, dont le quarré est 0,4684, dont le quadruple est 0,18736 : or, si l'on divise le quarré du sinus total, qui est 1, par 0,18736, le quotient est 5,33. Ainsi, on aura $R = l \times 5{,}33$, c'est-à-dire, que le rayon de l'arrondissement AR ou RC est égal à la largeur de la riviere multipliée par $5\frac{1}{3}$. Pour placer le point R, on cherchera dans le triangle ABR la valeur BR, au moyen du côté AR, et des deux angles connus, en faisant sin. 15° : 5,33 :: sin. tot. : BR = 20,59, largeurs de la riviere.

2° L'arrondissement en demi-cercle, dont DE est le diametre, devra être au moins de trois bricoles, et il ne peut en avoir moins, parce que l'angle de bricole excéderait 36 degrés. L'angle de coude étant nul, la formule devient $a = \frac{180° - 0}{6}$, d'où l'on tire $a = 30°$, $\frac{a}{2} = 15°$, dont le sinus est 0,25881, et le quadruple du quarré de ce sinus est 0,2679, par lesquels il faut diviser 1,0000. Le quotient est 3,73; ainsi, $R = l \times 3{,}73$.

3° Le troisieme arrondissement, ayant la forme d'une poire, et devant contenir 5 bricoles sous un angle rentrant de 45 degrés, la formule de-

vient $a = \frac{180° + 45}{10}$, où l'on voit que l'angle de coude est affecté du signe +, parce que l'angle est rentrant. On aura donc $a = 22° \frac{1}{2}$, et $\frac{a}{2} = 11° \frac{1}{4}$, dont le sinus est 0,19509. Le quadruple du quarré de ce sinus est 0,1524, par lesquels divisant 1,0000, on a 6,56 pour quotient : ainsi, $R = l \times 6,56$. Pour avoir la distance du centre de cet arrondissement au sommet de l'angle F, on fera sin. RFG : 6,56 :: sin. tot. : un quatrieme terme, qui sera la valeur de FR exprimée en largeurs de la riviere.

4° L'arrondissement suivant est un coude qui fait un angle de 38 degrés : ce coude peut n'être que de deux bricoles ; car la formule $a = \frac{180 - c}{2n}$ devient $a = \frac{180° - 38}{4}$, qui donne $a = 35° \frac{1}{2}$, dont la moitié est $17° \frac{3}{4}$; le sinus de cet angle est 0,30486 ; le quadruple du quarré de ce sinus est 0,3717, par lequel divisant 1,0000, il vient 2,69, ainsi $R = l \times 2,69$.

5° Le coude qui se présente ensuite, a 150 degrés d'ouverture, avec une seule bricole. Ainsi on a $a = \frac{180° - 150°}{2}$, ou bien $a = 15°$, et $\frac{a}{2} = 7° \frac{1}{2}$ dont le sinus est 0,13052 ; le quadruple du quarré de ce sinus est 0,0681, par lesquels divisant 1,0000, le quotient est 14,83. Ainsi $R = l \times 14,83$.

6° On propose ensuite un arrondissement en demi-cercle, qui differe du précédent en ce qu'il doit contenir quatre bricoles au lieu de trois ;

ainsi on aura $a = \frac{180° - 0}{8}$, d'où l'on tire $a =$ $22° \frac{1}{2}$, et $\frac{a}{2} = 11° \frac{1}{4}$, dont le sinus est 0,19509, et le quadruple du quarré de ce sinus est 0,1524, par lesquels divisant 1,0000, on trouve pour quotient 6,56. Ainsi $R = l \times 6{,}56$.

7° Le septieme arrondissement a la forme d'une poire, et doit contenir six bricoles sous un angle rentrant de 36 degrés; ainsi la formule devient $a = \frac{180 + 36}{12}$, d'où l'on tire $\frac{a}{2} = 9$ degrés, dont le sinus et 0,015643; le quadruple du quarré de ce sinus est 0,0978, par lesquels divisant 1,0000, on trouve pour quotient 10,22. Ainsi $R = l \times 10{,}22$.

8° On propose en huitieme lieu un coude sous l'angle de 90 degrés; ce coude ne peut pas contenir moins de deux bricoles, par la raison qu'on a vue ci-dessus; ainsi on aura $a = \frac{180° - 90°}{4}$, d'où l'on tire $\frac{a}{2} = 11° \frac{1}{4}$, dont le sinus est 0,19509; et $R = l \times 6{,}56$, comme au sixieme arrondissement.

9° Enfin, on propose un arrondissement mixte, sous différents angles contigus, qui vont en augmentant, ou sous différents compléments, qui vont en diminuant, comme H, F, D, A; on
Fig. 14 trouvera de même le rayon qui convient à chacun, en opérant comme si chaque coude était isolé. L'ensemble de ces arrondissements présente une spirale IGECB, qui n'a rien de défectueux, et qui convient avec la stabilité, pourvu que le plus petit angle de coude soit relatif au plus grand angle de bricole que le régime peut supporter.

95. Ces exemples font voir qu'il peut se trouver une variété infinie dans les différents contours que forment les rivieres, sans que leur stabilité soit altérée ; mais on sent bien aussi qu'en s'écartant de ces regles, on s'expose aux fouilles, à l'éboulement et à la rupture des digues, aux variations du lit, à la formation des îles, à la diminution de la dépense, et à mille désordres semblables. Résumons en peu de mots quelques regles principales, qui suivent des principes que nous venons d'établir.

96. Si on suppose le plus grand angle de bricole compatible avec le régime, égal à 36 degrés, le diametre du plus petit arrondissement en demi-cercle doit surpasser sept fois la largeur de la riviere, et ne peut pas contenir moins de trois bricoles ; s'il s'y en forme quatre, le diametre de l'arrondissement excédera treize fois la largeur de la riviere; s'il s'y en forme cinq, le diamètre excédera vingt fois la largeur de la riviere, et ainsi de suite.

D'après ces regles, il semble qu'on devrait conclure que la Marne, près de Carletin, au-dessus de Lagny, avant son confluent dans la Seine, faisant, suivant la carte de M. de Cassini, un arrondissement de 600 toises de rayon pour trois bricoles, comprises dans un angle de coude de 50 degrés d'ouverture, doit avoir environ 84 toises de largeur en cet endroit, si toutefois il n'y a pas d'obstacles étrangers.

La Seine au-dessous du même confluent, entre

Juvisy et Draveil, faisant un arrondissement de 1000 toises de rayon pour deux bricoles, comprises dans un angle de coude de 100 degrés d'ouverture, devroit n'avoir qu'environ 72 toises de largeur, et moins que la Marne.

Mais au-dessous de Paris les rayons des arrondissements sont trop petits par rapport à la largeur de la riviere, dont le cours sans doute a été gêné par quelque obstacle ; et de là est venue la disposition que la riviere a eue à former des îles : car le lit se divisant en deux bras plus étroits, pour embrasser une île, tend par ce moyen à rétablir le rapport convenable entre sa largeur et le rayon des arrondissements.

On peut encore remarquer que la Seine, au-dessous de Rouen, forme deux grands arrondissements, à-peu-près en demi-cercle, à la Bouille et à Ducler, qui ont 15 à 1600 toises de rayon pour trois bricoles ; d'où on pourrait conclure sa largeur d'environ 208 toises.

Mais ce grand arrondissement presque en demi-cercle, dans lequel est située la ville de Rouen, étant composé de 4 bricoles, devrait avoir près de 3000 toises de rayon, au lieu de 2100 toises qu'il a. C'est aussi sans doute cette irrégularité qui a donné lieu à la formation de plusieurs îles qu'on y remarque. On en pourrait dire autant de tous les autres arrondissements semblables.

97. Dans la même supposition, tout angle de coude qui, sous une seule bricole, n'est pas moindre que de 108 ou 110 degrés, peut avoir de la stabilité, mais s'il est plus petit, il se fera

une fouille un peu au-dessous du point d'incidence, contre l'arrondissement de la rive concave; la rive convexe sera rongée, et le coude n'aura point de stabilité. Si donc, pour des raisons particulieres, on se trouvait forcé de pratiquer ou de laisser subsister un pareil coude, il faudrait en revêtir l'arrondissement intérieur et extérieur en maçonnerie, ou du moins en murailles de pierres seches à grand talus, en calculant à l'ordinaire le rayon de l'arrondissement par la méthode prescrite ci-dessus, afin que la masse du courant soit renvoyée avec régularité dans la branche inférieure du lit.

Tout angle de coude qui n'est pas moindre que de 36 degrés, peut ne contenir que deux bricoles; mais s'il est plus petit, il devra en contenir trois, à moins qu'il ne soit revêtu en maçonnerie, et ainsi des autres.

98. Quand on est déterminé à revêtir en maçonnerie l'arrondissement d'un coude de riviere, on peut fixer à volonté le nombre de bricoles qu'y formera le fil de l'eau; mais il ne faudra pas oublier que plus l'angle de bricole sera grand, plus il faudra approfondir le lit dans l'étendue de l'arrondissement, et enfoncer par conséquent à proportion la fondation des murs de revêtement, qui courraient risque, sans cette précaution, d'être déchaussés par le courant.

99. En général, il paraît que toutes les fois qu'il s'agira de conduire un fluide dans un canal, tuyau, ou lit quelconque, qui n'est pas droit, mais qui forme des coudes ou des arrondisse-

ments, il est convenable de calculer les rayons de ces courbes, d'après les principes qu'on vient de voir, soit pour la conservation des parois, si elles sont de nature à céder à la trop grande action de l'eau ; soit pour la liberté du cours du fluide, et son plus grand débit. L'expérience nous a fait voir qu'un tuyau coudé sous un angle de 67 degrés 32 minutes, mais dont la bricole était réguliere, faisait le même débit qu'un autre tuyau de même diametre, dont l'angle de coude était de 81 degrés, mais la bricole irréguliere, quoique les charges des deux tuyaux fussent sensiblement les mêmes ; ce qui marque combien l'irrégularité de la répercussion du fluide qu'on oblige à suivre la branche inférieure mal disposée d'un lit, trouble l'ordre des filets, et dérange l'économie de la vîtesse moyenne. Ce n'est pas même assez de bien régler la courbure des arrondissements, il faut encore imiter la nature, qui accroît d'elle-même le lit, et ménage une plus grande section dans les coudes où la déviation des filets tend à diminuer la dépense ; ou à augmenter la pente.

Cette remarque et les regles précédentes peuvent également s'appliquer au lit des rivieres, aux tuyaux de conduite, à ceux des poëles, aux tuyaux de cheminées, quand ils sont dévoyés, et généralement à tous les canaux destinés à conduire le feu, l'air, les vapeurs, ou l'eau.

100. La largeur des rivieres nous a servi d'échelle dans les calculs précédents, pour fixer les rayons des différents arcs de cercle qui con-

viennent aux arrondissements des sinuosités; mais il pourrait y avoir de l'équivoque sur la valeur de cette mesure : quand les rivieres sont contenues entre des quais de maçonnerie, leur largeur, prise à la surface, ne differe guere de celle qu'on prétendait au fond ; mais quand les rives prennent un talus naturel dans l'argile, le sable, le gravier, etc., il faut se déterminer sur le choix de la largeur qui doit entrer dans les calculs. Suffit-il aussi de prendre cette largeur dans le temps des eaux ordinaires, ou faut-il se fixer à celle qui a lieu dans le temps des plus grandes crues ? Si on déterminait le rayon des arrondissements d'après la largeur du fond du lit, la bricole ne serait réguliere dans le lit, que lors des plus basses eaux; si, au contraire, on fixait ce rayon sur la largeur à la surface du lit, dans le temps des crues, la bricole ne serait exacte que dans cette circonstance. On serait dans la même alternative pour des rivieres sujettes à des écluses de retenue, qui, tantôt fermées, tantôt ouvertes, tiennent le lit très-haut ou très-bas. Il faut convenir qu'il est bien difficile d'obtenir une stabilité parfaite dans un lit qui est sujet à des haussements et baissements alternatifs : outre le premier inconvénient de l'irrégularité de la bricole, il arrive que quand les eaux sont hautes, les talus se trouvent appuyés par la pression de l'eau, sur-tout aux arrondissements concaves, et peuvent subsister avec une pente qui devient insuffisante quand l'eau vient ensuite à baisser, et à abandonner la berge à tout son poids; il faut

presque nécessairement qu'il se fasse alors un affaissement, ou un éboulement, qui est ensuite délayé et emporté par le courant: or, comme c'est toujours aux arrondissements concaves que les talus sont plus roides, et qu'au contraire ils sont plus doux et plus allongés à la rive opposée, qui est convexe, il suit que les premiers sont plus sujets à s'ébouler que les seconds, et cela sans remede, parce que les dépôts de l'eau ne peuvent pas s'y arrêter et réparer le dommage, tellement qu'à la longue le lit doit gagner du terrain, ronger la partie concavé, et perdre au contraire, en abandonnant la partie convexe; ce qui, au bout de quelques années, change le cours de la riviere, et diminue ou accroît la possession des propriétaires riverains. Il n'est donc pas possible qu'une riviere sujette à de pareilles alternatives ait une stabilité parfaite; et c'est ici que la théorie des tuyaux de conduite l'emporte sur celle des rivieres, parce que la figure du lit étant invariable, la forme des arrondissements est donnée, et ne peut être sujette à aucune incertitude. Néanmoins il faut en revenir au principe, que la stabilité du lit n'étant jamais plus exposée que dans le temps des grandes crues, et la vîtesse étant toujours au-dessous de celle du régime, lors des basses eaux, il est plus prudent de régler le rayon des arrondissements des cordes sur la largeur du lit à sa surface, dans le temps des crues; c'est alors qu'il est communément plus important qu'une riviere ait un grand débit, et que sa vîtesse n'éprouve aucune dimi-

nution : et d'ailleurs il y a moins d'inconvénient à faire le rayon trop grand, qu'il n'y en aurait à le faire trop petit. Concluons donc que la largeur, qui doit servir de mesure pour fixer les dimensions des arrondissements des coudes, est celle qui a lieu à la surface de l'eau d'une riviere, dans le temps que son lit est rempli, ou du moins élevé par les grandes crues de l'hiver.

CHAPITRE VII.

De la résistance occasionnée par les coudes du lit des rivieres et des tuyaux de conduite. Mesure de cette résistance. Augmentation de la pente naturelle.

101. La nature, dont la marche est toujours d'aller à ses fins par les moyens les plus simples, a assujetti presque toutes les rivieres à faire un grand nombre de sinuosités sur la longueur de leur cours, en vue de l'établissement du régime. Nous avons vu que le défaut d'homogénéité du terrain est la cause prochaine de cet effet; mais il en résulte un avantage bien précieux pour les cantons que chaque riviere arrose. L'élévation moyenne des terres hautes du globe est d'environ 600 pieds au-dessus de la surface de la mer; ainsi la source des rivieres un peu considérables est à-peu-près à cette hauteur : la longueur de leur cours est très-variée; mais il résulte du rapport de cette hauteur de la source, divisée par la longueur du

lit, que la pente combinée avec la section, qui dépendent l'une et l'autre de la quantité d'eau à écouler par chaque riviere, donnerait toujours une vîtesse plus grande que celle qui convient à la ténacité de la terre commune : or, le moyen d'adoucir cette pente est d'augmenter le développement du lit, en lui faisant faire beaucoup de circuits; par-là le régime s'établit beaucoup plus promptement, et dans la vérité les habitants de la terre ne jouissent du bienfait des fleuves et des rivieres, que quand leurs eaux, épurées par un cours plus tranquille, et ne coulant plus dans le fond des précipices, se prêtent aux besoins de l'agriculture, aux arrosements, et à la navigation. Plus un fleuve fait de tours, plus la résistance de son lit se trouve multipliée, plus il rencontre d'obstacles à vaincre depuis sa source jusqu'à la mer, plus aussi sa vîtesse se modere et se calme; et au lieu de déchirer les entrailles de la terre, en y creusant un lit profond, où il ne roule avec grand bruit que des rochers et des arbres déracinés, il coule majestueusement à la surface du terrain, qu'il embellit et qu'il fertilise.

102. Nous cherchons ici à déterminer quelle est en effet dans la nature la résistance que produit le coude d'une riviere, c'est-à-dire, quelle partie de la force accélératrice est détruite par la déviation des filets, qui se plient dans un lit tortueux, en quittant leur premiere direction, pour en prendre une autre. En supposant les coudes et les arrondissements tracés suivant les principes du

chapitre précédent, ce qui est une condition absolument nécessaire pour que la loi de la résistance soit constante, on peut présumer d'abord que cette résistance est d'autant plus grande que le quarré de la vîtesse est plus grand, c'est-à-dire qu'elle lui est proportionnelle. Considérant ensuite que la veine fluide enfermée et contenue dans le lit, est obligée de se plier d'autant plus que l'angle sous lequel elle est censée frapper la berge et se réfléchir est plus grand, on peut, suivant la théorie ordinaire du choc des fluides, supposer la résistance proportionnelle au quarré du sinus des angles d'incidence ; et enfin, s'il se trouve plusieurs bricoles égales ou inégales, dans une longueur donnée du lit, la résistance se répétera autant de fois qu'il y aura de bricoles.

103. Ainsi, en nommant V la vîtesse moyenne d'un courant uniforme, s le sinus de l'angle de bricole, et m un nombre constant, la résistance d'une bricole serait représentée par $\frac{V^2 s^2}{m}$, et celle de plusieurs bricoles égales serait $\frac{V^2 s^2 n}{m}$, en nommant n le nombre des bricoles.

Pour comparer ce résultat à l'expérience, et trouver la valeur du nombre constant m, au cas que la loi des vîtesses et du sinus des angles soit vraiment observée, il fallait se déterminer sur le choix des observations : il paraissait difficile d'en faire d'exactes sur les rivieres naturelles un peu grandes, quoique par la comparaison de leurs vîtesses réelles, affectées de plusieurs sinuosités, à

ment, ni dans celui de deux pouces de diametre, et de 255po., 25 de longueur : outre cela, nous avions réuni dans ce même tuyau dix bricoles, de 36 degrés chacune, avec une vîtesse de plus de 71 pouces par seconde.

L'augmentation de charge nécessaire pour imprimer même vîtesse dans ce tuyau que quand il était droit, et qu'il avait même longueur, s'est trouvée 5po.,905; ainsi celle qui répondait à une seule bricole de 36° était 0po., 5905 ; et on avait la vîtesse ou $V=71{,}59$; $s=0{,}58778$, en faisant le sinus total égal à 1. La valeur de la résistance (103) exprimée par $\frac{V^2 s^2}{m}$ devient donc $\frac{5125{,}128 \times 0{,}345485}{m} = 0{,}5905$, d'où l'on tire $m=2998{,}5$, qu'on peut, sans erreur sensible, prendre pour 3000.

La formule qui exprime la résistance d'une bricole quelconque, dans les tuyaux de conduite, est donc $\frac{V^2 s^2}{3000}$. La table suivante sert à faire voir que les résistances trouvées par l'expérience, relatives à différentes vîtesses et à différentes bricoles, plus ou moins nombreuses, dans des tuyaux de différentes longueurs, où le régime était établi, sont sensiblement conformes à celles que donne la théorie. La premiere colonne montre les numéros des expériences; la seconde exprime le nombre des bricoles et l'ouverture des angles d'incidence; la troisieme, les vîtesses de l'eau dans les tuyaux; la quatrieme, le quarré de ces vîtesses; la cinquieme, l'augmentation de charge, ou la résistance donnée par l'expérience; et la sixieme, l'aug-

mentation de charge, ou la résistance calculée par la formule.

Numéros des expériences.	Nombre de bricoles et de degrés des angles de bricole ou d'incidence.	Vitesse par seconde, commune aux tuyaux droits et aux tuyaux coudés, suivant l'expérience.	Quarré de la vitesse de l'eau dans les tuyaux droits ou coudés.	Augmentation de charge pour vaincre la résistance des coudes suivant l'expérience.	Augmentation de charge, ou résistance suivant la théorie.
Tuyau d'un pouce de diametre, et de 117 pouces de longueur.					
		po.	po.	po.	po.
90	3 bric. de 36.° o	84,945	7216,053	2,49	2,49
91	2 36.° o	id.	id.	1,5	1,66
93	4 24. 34	id.	id.	1,5	1,66
94	3 24. 34	id.	id.	1,12	1,24
92	1 36	id.	id.	0,75	0,83
95	2 24. 34	id.	id.	0,75	0,83
96	1 24. 34	id.	id.	0,37	0,41
104	10 36. o	71,59	5125,128	5,905 base.	5,905
Tuyau d'un pouce de diametre, et de 138 pouces de longueur.					
105	4 36. o	58,808	3458,38	1,64	1,59
Tuyau d'un pouce de diametre, et de 117 pouces de longueur.					
99	4 36. o	58,438	3415,0	1,6	1,57
100	2 36. o	id.	id.	0,75	0,78
102	4 24. 34	id.	id.	0,75	0,78
101	1 36. o	id.	id.	0,37	0,39
Tuyau d'un pouce de diametre, et de 138 ½ pouces de longueur.					
106	4 36. o	29,33	860,34	0,41	0,396
Tuyau d'un pouce de diametre, et de 737 pouces de longueur.					
107	4 36. o	28,657	821,5	0,39	0,378

106. L'application de cette théorie aux tuyaux inclinés et aux lits des rivieres est bien facile à faire. Soit AB la hauteur entiere d'un réservoir ABIK, BC la longueur horizontale d'un tuyau, dans lequel Fig. 15.

se trouvent un ou plusieurs coudes, qui contiennent un certain nombre de bricoles égales ou inégales. La charge entiere AB doit être considérée comme partagée en trois parties, destinées chacune à une fonction différente : la premiere AD sera employée à imprimer la vîtesse avec laquelle l'eau coulera dans le tuyau, et par l'orifice C; la seconde DE servira à vaincre la résistance des coudes, et la troisieme EB doit vaincre la résistance ordinaire du tuyau BC, sur toute sa longueur développée : or, si dans cet état, à partir du point D, on fait DH= BC, et qu'on substitue en place de BC le tuyau incliné DH, coudé de la même maniere que BC, l'eau y aura la même vîtesse, et la résistance des coudes répandue sur la longueur DH y sera vaincue. Or, si on prolonge ce tuyau indéfiniment vers L, en répétant à l'infini les mêmes coudes, sur une suite de longueurs égales chacune à DH, le mouvement s'y perpétuera toujours uniformément, avec la premiere vîtesse due à la charge AD, parce que la pente du tuyau se trouve augmentée sur chaque longueur égale à DH, d'une quantité qui suffit pour vaincre la résistance des coudes qui y sont faits ; mais la vraie pente, dans les deux cas, sera BE + ED, divisée par la longueur développée des tuyaux BC ou DH.

Nous avons vu (22 et 23) que le mouvement uniforme, dans un tuyau incliné, était le même que celui d'une riviere ; ainsi, on doit conclure que quand une riviere forme des sinuosités qui se répetent à-peu-près régulièrement par inter-

valles égaux, sa pente est composée de celle qui est nécessaire pour vaincre la résistance de son lit, conformément à la formule du mouvement uniforme ; plus celle qui est nécessaire pour vaincre la résistance de ses coudes.

107. Soit donc une riviere qui a des sinuosités, telles que, sur la longueur de 600 toises, elle forme un certain nombre de coudes, composés ensemble d'un certain nombre de bricoles, dont les angles sont connus, et que sa vîtesse moyenne soit de 20 pouces par seconde : si je veux connaître sa pente entière sur 600 toises, je commencerai par chercher, au moyen de la formule (50), quelle est la valeur de *b*, eu égard à sa vîtesse et à son rayon moyen, en exprimant par $\frac{1}{b}$ la pente nécessaire pour vaincre la résistance du lit. Supposons que cette pente soit $\frac{1}{21600}$, qui revient à deux pouces pour une longueur de 600 toises ou de 43200 pouces ; mais s'il s'y fait 10 bricoles, de 30 degrés chacune, sur cette même longueur, je chercherai par la formule $\frac{V^2 s^2}{3000}$ quelle est l'augmentation de charge ou de pente qui convient pour vaincre la résistance de ces 10 bricoles ; je la trouverai de $\frac{2}{3}$ de pouce, qui, ajoutés à 2 pouces, font une pente totale de 2 pouces 8 lignes sur une longueur de 600 toises, qui peut enfin être exprimée par $\frac{1}{16200}$.

On voit par cet exemple qu'une pente réelle, égale à $\frac{1}{16200}$ ne produit réellement qu'une vîtesse due à $\frac{1}{21600}$, à cause de la résistance des coudes ; ce qui confirme ce que j'ai dit, que les sinuosités

des rivieres sont un moyen que la nature emploie pour hâter l'établissement de la vîtesse de régime, malgré l'excès apparent de la pente. Il est un second moyen, l'élargissement du lit : nous en parlerons tout-à-l'heure en traitant des accrues permanentes.

SECTION III.

APPLICATION DE LA THÉORIE DU MOUVEMENT UNIFORME A LA PRATIQUE.

108. Jusqu'ici nous avons étudié les lois que la nature s'est prescrites dans l'économie et l'administration de l'élément qui joue un rôle si important à la surface du globe. Nous nous proposons, dans cette troisieme section, d'appliquer les principes que nous avons puisés dans l'expérience, ou du moins qui sont avoués par elle, à l'examen des principaux résultats de ce que l'art a imaginé, pour borner les effets naturels, ou les appliquer aux besoins de la société. Nous allons donc considérer successivement les effets des accrues, des redressements qu'on peut faire pour éviter les inondations, de l'établissement des ponts, des écluses et des réservoirs ; des canaux en général et de leur plus grand effet, sur-tout pour dessécher un pays, et enfin des saignées des rivieres et des canaux. Nous tâcherons de donner la solution des problêmes les plus intéressants, et dont l'application est ou plus fréquente ou plus utile. Quoique la théorie du mouvement uniforme soit toujours la base de ce que nous avons à dire ici, nous aurons cependant occasion de parler du mouvement varié de l'eau, dont l'irrégularité semble se soustraire aux recherches de la théorie, mais qui est néanmoins soumis à des lois aussi immuables que l'autre.

CHAPITRE PREMIER.

Des accrues permanentes des rivieres; des hauteurs de leurs sources; des accrues périodiques.

109. Nous avons fait voir (71) que chaque espece de sol est capable de résister à l'effort du courant qui l'attaque avec une vîtesse rélative à sa ténacité ou à son inertie. Il est vrai que dans nos expériences le fond du canal était un madrier, qui donnait peu d'appui au gravier et aux galets arrondis; ce qui pourrait porter à croire que nous avons trouvé les vîtesses de régime de ces matières trop petites, et que dans un fond raboteux et inégal elles résisteraient à des vîtesses plus grandes. Quoi qu'il en soit, il peut arriver qu'un lit paraisse avoir de la stabilité, et demeure constant, quoiqu'il ne doive sa stabilité qu'à un transport successif de graviers et de sable, qui viennent de la partie haute du lit supérieur, et qui, roulés et chariés sans interruption par le courant, emportés aussitôt qu'arrivés, préservent le vrai fond du lit, et le garantissent de l'action de l'eau, tant que dure ce transport. Nous avons vu (72) avec quelle lenteur l'eau charie les matieres qui cedent à une certaine intensité de vîtesse, laquelle n'est pas assez grande pour les enlever avec violence et les disperser, mais qui suffit pour les faire rouler avec ordre. C'est au physicien à observer quel est à cet

égard le caractere et la maniere de chaque riviere en particulier ; mais il reste constant que dans chaque espece de sol il y a une vîtesse proportionnée à ce sol, qui est trop petite pour le creuser et pour approfondir le lit, ou trop grande pour permettre qu'il s'exhausse et se remplisse : or, si on suppose dans un lit donné cette vîtesse connue, et qu'on sache aussi la quantité d'eau que doit dépenser ce lit, on peut desirer de savoir quelle est la plus petite pente absolument requise qu'il faut qu'ait ce lit, et les dimensions de sa section pour avoir de la stabilité. C'est ce que nous allons déterminer par le problême suivant.

PROBLÊME.

110. La quantité d'eau que doit dépenser une riviere étant connue, ainsi que sa vîtesse de régime ; déterminer la plus petite pente que son lit puisse avoir, et les dimensions de ce lit.

SOLUTION.

Puisque la pente doit être le plus petite possible, il faut que le lit soit d'une figure dans laquelle le rayon moyen soit le plus grand possible : or, nous avons vu (60) que le lit trapeze dans lequel la largeur au fond est les $\frac{2}{3}$ de la hauteur de l'eau, et dont les talus ont pour base les $\frac{4}{3}$ de cette profondeur, est de tous les lits de cette espece, et possibles dans la pratique, celui qui donne le plus grand rayon moyen, et qui exige le moins de pente pour une vîtesse donnée. Nous avons vu, de

plus, que l'aire et le périmetre de ce lit sont les mêmes que ceux d'un lit rectangulaire, dans lequel la largeur est le double de la profondeur : ainsi dans un pareil lit la section est égale à deux fois le quarré de la profondeur, et (61) le rayon moyen est égal à la moitié de cette même profondeur : ainsi nommant D la dépense donnée, V la vitesse de régime connue, l la largeur et h la profondeur, on aura l'équation $\frac{D}{V}=2h^2$, ou $\sqrt{\frac{D}{2V}}=h$, et $\sqrt{\frac{2D}{V}}=l$. Voilà ce qui regarde la section.

Quant à la pente exprimée par $\frac{1}{b}$, la formule (50) donne $\sqrt{b}-\text{L.}\sqrt{b+1,6}=\frac{297(\sqrt{r}-0,1)}{V+0,3(\sqrt{r}-0,1)}$ on substituera au lieu de $\sqrt{r}-0,1$ sa valeur $\sqrt{\frac{h}{2}}-0,1$, et, tout étant connu dans le second membre, on en tirera facilement la valeur de b (62).

111. Si par le moyen du problême précédent, et, en connaissant aussi la dépense de chacune des rivieres qui se jettent dans un fleuve, depuis sa source jusqu'à la mer, on calcule la pente qu'il devrait avoir sur chaque partie de son cours, comprise entre deux accrues, c'est-à-dire, d'abord la pente depuis la mer jusqu'à la premiere riviere qu'il reçoit dans son lit, puis la pente depuis cette premiere riviere jusqu'à la seconde, et ainsi de suite jusqu'à la source, la somme de toutes ces pentes différentes donnera la plus petite hauteur dont la source de ce fleuve pourrait être élevée au-dessus du niveau de la mer.

Mais si la hauteur effective de la source de ce fleuve est double, triple, quadruple, etc. de celle qu'on aura trouvée, il faudra en conclure que la pente du fleuve, d'une accrue à l'autre, sera aussi à-peu-près double, triple, quadruple, etc. de celle qu'on avait d'abord trouvée, en supposant que le lit était celui qui répond à la plus petite pente. Ainsi on pourra proposer le nouveau problême que voici.

PROBLÊME.

112. La dépense d'un fleuve étant connue, en un lieu quelconque de son cours, sa pente, et la vîtesse de régime; déterminer les dimensions de son lit.

SOLUTION.

Soit nommée D la dépense connue, b le dénominateur de la pente $\frac{1}{b}$, V la vîtesse moyenne relative au régime, x la largeur du lit, et y sa profondeur; la section nommée S doit être égale à la dépense divisée par la vîtesse : ainsi on aura d'abord $\frac{D}{V}=S=xy$. Le dénominateur b étant connu, on peut faire $\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}=\sqrt{B}$; et la formule de la vîtesse moyenne (50) deviendra $V=\frac{297(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{B}}-0,3(\sqrt{r}-0,1)$, qu'on peut exprimer ainsi : $V=(\sqrt{r}-0,1)\left(\frac{297}{1b7}-0,3\right)$, d'où l'on tire $\frac{V}{\frac{297}{\sqrt{B}}-0,3}=\sqrt{r}-0,1$; et enfin $\frac{V}{\frac{297}{\sqrt{B}}-0,3}+0,1=\sqrt{r}$. On aura donc

la valeur de r; mais cette valeur, en supposant le lit rectangulaire, est égale à $\frac{xy}{x+2y}$: on a donc les deux équations $S=xy$, et $r=\frac{xy}{x\ 2y}$; d'où l'on tire $x=\sqrt{\left(\frac{S}{2r}\right)^2-2S}+\frac{S}{2r}$; la largeur étant connue, on en déduira la profondeur, et on aura les dimensions du lit rectangulaire.

Nous avons déja observé (62) que le problême a deux solutions, dont une donne la profondeur plus grande que la largeur, et l'autre donne le lit plus large que profond : c'est celle-ci qui convient dans la pratique.

Si on veut que le lit ait la figure d'un trapeze, dont les talus (60) aient pour base les $\frac{4}{3}$ de la hauteur, on ajoutera à la largeur qu'on vient de trouver les $\frac{4}{3}$ de la profondeur; ce qui donnera la largeur de la section à la surface de l'eau, et on soustraira de cette même largeur les $\frac{4}{3}$ de la profondeur, pour avoir la largeur au fond du lit. Cette nouvelle forme, en se rapprochant de la figure naturelle des lits ordinaires, ne change rien aux données du problême, parce que le lit trapeze a, comme nous l'avons dit, même rayon moyen que le lit rectangulaire qui lui répond, et dont la largeur est la moyenne de celle du premier.

Application des deux problêmes précédents à la pente de la Seine et à sa section.

113. Pour donner un exemple de l'application qu'on peut faire des deux problêmes précédents au cours d'une riviere, nous choisirons la Seine considérée dans toute l'étendue de son cours, depuis sa source jusqu'à son embouchure à Quillebeuf, et nous supposerons qu'il tombe du ciel, année moyenne, 18 pouces de hauteur d'eau sur toute l'étendue du terrain qui fournit les eaux à cette riviere, mais que le quart seulement de cette quantité est employé à fournir à sa dépense moyenne; les $\frac{3}{4}$ restants s'écoulent en partie par les accrues extraordinaires, et fournissent à l'évaporation ainsi qu'à la nutrition des plantes.

Pour ôter toute équivoque sur la mesure de la lieue, nous emploierons celle du mille, qui d'ailleurs se prête mieux au calcul : ainsi un mille quarré fait un million de toises quarrées, ou 36 millions de pieds quarrés, qui, multipliés par le quart de 18 pouces, ou 4 $\frac{1}{2}$ pouces, font treize millions cinq cents mille pieds cubes d'eau à écouler en 365^{jours},24, ou en 31556736 secondes, ce qui revient à 0^{pi},4278 par seconde.

Nous trouvons que la totalité du terrain qui fournit les eaux que la Seine dépense à son embouchure est de 20465 mille quarrés. La plus grande longueur de ce terrain est depuis Quillebeuf jusqu'à trois lieues au-dessus de Langres, où

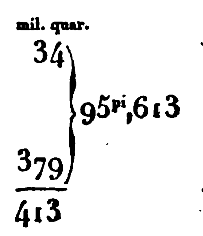
sont les sources de la Marne : cette ligne a 215 milles de longueur ; elle passe à portée de Troyes, Nogent, Paris, Meulan, et Pont-de-l'Arche ; elle partage le terrain en deux parties inégales, savoir 11136 milles à droite, et 9329 à gauche.

Mais pour fixer, à peu de chose près, quelle est, d'après notre supposition, la dépense de la Seine en un lieu quelconque de l'étendue de son cours, il faut examiner plus en détail les rivieres qui se jettent dans son lit, et la quantité d'eau qu'elles y amenent.

Dépense moyenne du lit par seconde en pieds cubes.

114. Le terrain qui fournit la source de la Seine, sur 6,4 milles de longueur jusqu'au point où elle commence d'être flottable, contient en superficie ci . . . . mil. quar. 34

De là jusqu'au confluent de l'Ourse, sur 32 milles de longueur directe, il y a 379



	mil. quar.	
ci	34	95pi,613
il y a	379	
	413	

dont les eaux se jettent directement dans le lit de la Seine par plusieurs ruisseaux répandus sur sa longueur : ainsi la dépense moyenne de cette partie du lit n'est due qu'à 34 milles, qui produisent la source, plus la moitié de 379 milles. Total $223\frac{1}{2}$ milles, lesquels, à 0pi,4278

	mil. quar.	Depense moyenne du lit par seconde en pieds cubes.
Ci-contre.	413	
cubes par mille, font la dépense moyenne 95,613 portée à l'accolade précédente.		373pi,683
Les eaux de la rivière d'Ourse sont produites sur.	199	
Depuis son confluent jusqu'à celui de l'Aube, sur 39 milles de longueur directe, il y a. . .	523	
	1135	
dont les eaux se rendent dans le lit de la Seine, et dont la moitié seulement doit entrer dans l'évaluation de la dépense moyenne du lit; ce que nous répétons ici une fois pour toutes.		1066,077
Les eaux de la rivière de l'Aube sont produites sur. . . .	1169	
Depuis son confluent jusqu'à celui de l'Yonne, sur 27,5 milles de longueur, il y a.	376	
	2680	
Les eaux de la riviere d'Yonne, de l'Armançon, etc. sont produites sur.	3126	3102,405
Depuis son confluent jusqu'à celui de la Marne, sur 33 milles de longueur, il y a.	2892	
	8698	

	mil. quar.	Dépense moyenne du lit par seconde en pieds cubes.
De l'autre part.	8698	
Les eaux de la Marne, etc. sont produites sur.	3687	5368pi,247
Depuis son confluent jusqu'à celui de l'Oise, sur 16,6 milles de longueur, il y a.	327	
	12712	
Les eaux de l'Oise, de l'Aisne, etc. sont produites sur. . .	4601	7566,712
Depuis son confluent jusqu'à celui de l'Yton, sur 37,5 milles de longueur, il y a.	749	
	18062	
Les eaux de l'Yton, de l'Eure, etc. sont produites sur. .	1559	8574,395
Depuis son confluent jusqu'à Quillebeuf, sur 28 milles de longueur, il y a.	844	
	20465	

115. Si on suppose que la vîtesse moyenne de régime de la Seine soit de 25 pouces par seconde, qui répondent à une vîtesse de 30 pouces à la surface, on pourra calculer l'une après l'autre par le problême (110), quelles seraient les pentes de la Seine d'une accrue à l'autre, dans un lit direct de la figure qui répond à la moindre pente; en additionnant les différences de niveau produites par ces pentes depuis l'embouchure de cette riviere jusqu'à la source, on trouvera que la source ne

serait élevée que d'environ 153 pieds au-dessus du niveau de la mer.

Mais si le lit, au lieu d'être direct d'une accrue à l'autre, comme on l'avait d'abord supposé, faisait des sinuosités qui doublassent son cours entier, comme cela a lieu, à peu de chose près, de Paris à Rouen, la hauteur de la source, dans le lit de la plus petite pente, deviendrait de 306 pieds; et il s'en faudrait encore de beaucoup que cette hauteur approchât de la véritable, parce que la figure du lit de la Seine est bien différente de celle du lit qui conviendrait à la plus petite pente, et qu'elle se prête à une pente beaucoup plus grande.

La quantité de milles quarrés dont la Seine reçoit les eaux, avant de recevoir celles de la Marne, est, suivant l'état ci-dessus, de 8698, et la Marne reçoit celle de 3687. La Seine, au-dessus de Paris, avant de recevoir la riviere des Gobelins, écoule donc les eaux d'environ 12400 milles quarrés, au lieu de 15870, qui répondent à l'évaluation de M. Mariotte : ainsi, dans notre supposition, il doit passer dans le lit de la Seine, entre Charenton et Paris, 5304,72 pieds cubes par seconde; cette dépense, divisée par la vîtesse $2^{pi}1^{po}$, donne une section égale à 2546,26 pieds quarrés : la profondeur du lit de la plus petite pente serait donc $\sqrt{\frac{D}{2V}} = 35^{pi},65$, et sa largeur serait de $71^{pi},30$; $\sqrt{r} - 0,1$, exprimée en pouces, deviendrait 14,525, et on trouverait $b = 23094$; c'est-à-dire, que la moindre

pente possible qui réponde dans ce lit à 25 pouces de vîtesse moyenne est $\frac{1}{23094}$.

Mais on sait, par les nivellements de M. Picart, que la pente réelle de la Seine, au-dessus de Paris, est égale à $\frac{1}{6000}$: ainsi la pente du lit réel est à la pente du lit supposé comme 23094 est à 6000, ou : : 3,84 : 1. Si donc on suppose que le même rapport ait lieu pour toutes les parties du cours de la Seine, on conclura la vraie hauteur de la source de la Seine environ 1175 pieds, sans compter l'augmentation de pente due aux coudes sur toute la longueur du cours, dont nous parlerons tout-à-l'heure. Par une suite du même calcul, on trouverait que la hauteur de Paris à Quillebeuf est d'environ 150 pieds.

116. Enfin, puisque nous supposons connues la dépense de la Seine au-dessus de Paris, sa pente et sa vîtesse moyenne, dans son état ordinaire, nous sommes en état de calculer, par le problême précédent (112) les dimensions de son lit moyen entre Charenton et Paris.

L'équation $\frac{V}{\frac{297}{\sqrt{B}}-0{,}3}+0{,}1=\sqrt{r}$ donne 6,7454 pour la racine quarrée du rayon moyen, ou $45^{po},5$ pour le rayon moyen, et la valeur de $x=\sqrt{\left(\frac{S}{2r}\right)^2-2S}+\frac{S}{2r}$ devient en nombres $\sqrt{(4029{,}246)^2-733322{,}88}+4029{,}246=7966^{po},43$: cette largeur du lit étant connue, on en déduit la profondeur, qu'on trouve égale à $46^{po},026$, ou à $3^{pi},835$: ainsi les dimensions

du lit, d'après toutes les données employées dans ce calcul, seraient de 663,87 pieds de largeur, sur 3,835 pieds de profondeur réduite, ce qui ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité.

117. La Seine, avant de recevoir la Marne, ne dépense que l'eau qui lui est fournie par 8696 milles quarrés, ou 3721 pieds cubes par seconde: si on suppose, comme il le paraît par les nivellements de M. Picart, que sa pente n'est encore que $\frac{1}{6000}$, et que la vîtesse de régime soit aussi de 25 pouces par seconde, on trouvera que les dimensions de son lit doivent se réduire à 463 pieds 4 pouces de largeur, sur 3 pieds 10 pouces 3 lignes de profondeur : ainsi la jonction des eaux de la Marne à celles de la Seine occasionne au lit de la Seine une augmentation de largeur de 200 pieds, tandis que la profondeur du courant baisse d'environ 3 lignes, la vîtesse de régime restant constante. On pourrait conjecturer de là que la pente de la Marne est plus grande que celle de la Seine avant leur confluent, et on peut, à cette occasion, proposer le problême général des accrues permanentes, que voici.

PROBLÊME.

118. Connaissant la largeur, la profondeur et la vîtesse de régime d'une riviere, dont le lit, creusé dans un sol homogene, reçoit ensuite une ou plusieurs accrues, dont on connaît la dépense totale ; déterminer les dimensions et la pente du nouveau lit, qui écoule toutes les accrues.

SOLUTION.

Nous cherchons à déterminer en général la variation qu'éprouve le lit d'une riviere, lorsqu'après avoir coulé dans un lit où sa dépense et les dimensions du lit, et la vîtesse moyenne, par conséquent, sont dans un rapport convenable et exact avec la nature du sol, il survient une accrue, c'est-à-dire une augmentation de dépense quelconque, qui oblige ce lit à s'élargir, à s'approfondir, et à changer de pente, pour conserver la même vîtesse moyenne qui convient au régime. On sent bien qu'au confluent même l'ordre des vîtesses des filets d'eau vers les deux rives qui se terminent au bec du confluent, doit être absolument interverti, puisque ces vîtesses, qui étaient les moindres dans chaque lit séparé, doivent devenir les plus grandes, et répondre à la vîtesse du filet du milieu dans le lit commun; mais cette augmentation ne peut pas se faire tout-à-coup : les deux filets d'eau de chaque courant restent quelque temps séparés par une bande d'eaux mortes, c'est-à-dire dont la vîtesse ne s'accélere que par degrés, ce qui donne lieu à un dépôt sur le prolongement du bec du confluent; ce dépôt, qui représente assez bien l'arête saillante d'un glacis, augmente la paroi, diminue un peu la section, et corrige l'effet de la trop grande largeur du lit au point de réunion. Quand les eaux sont bien mêlées, quand l'ordre des vîtesses de tous les filets est bien établi sur toute l'étendue du lit commun, c'est alors qu'on peut en déter-

miner l'étendue : sa largeur est ordinairement moindre que la somme des largeurs des lits séparés, mais plus grande que l'une d'elles ; sa profondeur est plus grande qu'elle n'était dans chacun, et la pente est communément moindre.

Soient D la somme des dépenses réunies dans le lit commun, l et h la largeur et la hauteur du lit de la riviere principale, avant l'accrue, V la vîtesse de régime commune aux différents lits ; on aura $\frac{D}{V}$ pour l'expression de l'aire de la section du grand lit. Nous nommerons S cette aire de la section. Si la pente de la riviere, au-dessous du confluent, restait la même qu'auparavant, il faudrait, pour conserver la même vîtesse, que le rayon moyen restât le même, malgré l'augmentation du lit ; mais cet effet ne peut avoir lieu dans la nature : car si la hauteur seule augmentait d'une quantité quelconque y, la valeur du rayon moyen $\frac{l(h+y)}{l+2(h+y)}$ serait toujours plus grande que celle du rayon moyen $\frac{lh}{l+2h}$ du premier lit, à moins que la largeur ne diminuât. De même, si la largeur seule augmentait de la quantité x, le rayon moyen $\frac{(l+x)h}{l+x+2h}$ ne pourrait rester constant qu'en diminuant la hauteur : or, l'expérience montre constamment qu'après un confluent, aucune des deux dimensions ne diminue quand l'eau agit librement sur elles, et qu'au contraire elles augmentent l'une et l'autre ; mais, puisqu'il est prouvé que l'augmentation d'une seule dimension fait augmenter le rayon moyen,

quoique l'autre reste constante, à plus forte raison doit-il augmenter, quand le lit s'accroît dans les deux sens.

Si l'augmentation du rayon moyen est inévitable, quand la section augmente, la diminution de la pente devient nécessaire pour conserver l'égalité de la vîtesse de régime, et cette diminution dépend absolument du changement que la figure du lit éprouve : ici, il semble d'abord que nous n'avons aucune donnée au moyen de laquelle le problême soit déterminé ; cependant on peut remarquer, 1° que dans les lits ordinaires, creusés par la nature, la largeur excede toujours de beaucoup la hauteur ; 2° que, pour augmenter le rayon moyen de la même quantité par l'une ou l'autre de ses dimensions, il faut étendre la largeur beaucoup plus que la hauteur, comme on peut s'en convaincre en comparant les quantités $\frac{(l+x)h}{l+x+2h}$ et $\frac{l(h+y)}{l+2(h+y)}$; et, comme on voit, après une accrue, la largeur du lit beaucoup plus augmentée, à proportion, que sa profondeur, il paraît qu'on doit conclure que la force de l'eau agit sur le lit de maniere à augmenter le rayon moyen également par chacune des deux dimensions. D'après cette hypothese, qui paraît plus que probable, on peut former l'équation $\frac{(l+x)h}{l+x+2h}=\frac{l(h+y)}{l+2(h+y)}$; mais on a toujours la section $S=(l+x)(h+y)$, d'où l'on tire $l+x=\frac{S}{h+y}$: substituant dans l'équation précédente cette valeur de $l+x$, on a $\frac{Sh}{S+2h(h+y)}=\frac{l(h+y)}{l+2(h+y)}$,

, qui est une équation du second degré, de laquelle on déduit $h+y = \frac{\sqrt{8Sbh^2 + S^2(l-2h)^2} - S(l-2h)}{4hl}$.

Ainsi connaissant la largeur et la profondeur du premier lit, avant l'accrue, et la section du nouveau lit, donnée par le quotient de la nouvelle dépense, divisée par la vîtesse constante, on cherchera d'abord la nouvelle profondeur, exprimée par $h+y$, et, d'après celle-ci, la nouvelle largeur : ces deux dimensions étant connues, on trouvera le rayon moyen du nouveau lit, et la formule ordinaire du mouvement uniforme donnera ensuite la nouvelle pente diminuée du lit.

119. Pour donner une application de ce calcul, nous supposerons une riviere de 40 pieds de largeur sur 5 de profondeur, qui a une vîtesse de régime de 20 pouces par seconde, ce qui lui suppose une pente de $\frac{1}{9128,85}$, ou d'un peu moins de 9 lignes $\frac{1}{2}$ par 100 toises. Si cette rivière se trouve successivement accrue, au point de doubler la dépense, ou qu'elle reçoive une autre riviere de pareilles dimensions et de même vîtesse, on demande comment le lit et la pente doivent se régler, pour fournir à une dépense de 400 pieds de section, avec une vîtesse égale de 20 pouces.

On a donc $S = 400$ pi. ; $l = 40$ pi. ; $h = 5$ pi. : avec ces données, l'équation précédente donne $h+y = 5^{pi},6155$, et $l+x = 71^{pi},231$: le rayon moyen qui en résulte sera $4^{pi},8507$, ou $58^{po},2084$, et $\sqrt{r} - 0,1 = 7,5294$. Avant l'accrue, le rayon moyen était $4^{pi} = 48^{po}$, et $\sqrt{r} - 0,1$ n'était égal

qu'à 6,8282. Cette différence indique la diminution que doit essuyer la pente pour conserver la même vîtesse de 20 pouces; et si on calcule cette pente d'après V = 20 pouces, et $\sqrt{r} - 0{,}1 = 7{,}5294$, on trouve $\sqrt{b} - \text{L.}\sqrt{b} = 100{,}4607$, et $\frac{1}{b} = \frac{1}{11048}$, qui équivaut à-peu-près à 7 li. $\frac{5}{6}$ par 100 toises: ainsi la pente se trouve diminuée d'un peu moins de 1 ligne $\frac{2}{3}$ par 100 toises.

120. La vîtesse de régime n'est donc pas la seule donnée qui caractérise une riviere, et qui regle son lit; il y a un certain rapport entre sa largeur et sa profondeur moyennes, qui résulte de la nature du sol qui fait le lit, quand il dépense plus ou moins d'eau : ainsi, par exemple, la Seine affecte un plus grand rapport de sa largeur à sa profondeur, que les rivieres qui coulent dans un terrain plus doux et plus argileux. Bornons-nous sur ceci à deux exemples, qu'on pourra appliquer à toutes les autres rivieres.

1° En supposant que la Seine, un peu au-dessus de Paris, ait en effet pour dimensions moyennes 664 pieds de largeur (116), et $3^{pi},835$ de profondeur, on peut demander quelles seraient les dimensions de son lit vers sa source, en terrain homogene, en supposant sa section égale à un pied quarré, et la même vîtesse de régime qu'auprès de Paris. La formule du problême (118) donne dans ce cas $l = 1^{pi},5489$, et $h = 0{,}6456$: la largeur de ce lit est plus que double de la profondeur, et si l'on supposait la section encore plus petite, le rapport

de ces dimensions se rapprocherait toujours de celui de 2 à 1, sans cependant l'égaler jamais que dans un lit infiniment petit. Quoi qu'il en soit, en bornant le lit de la Seine, vers sa source, à la section d'un pied quarré, les dimensions du lit, telles que nous venons de les déterminer, étant substituées dans l'équation du problême (118), avec une section quelconque de la Seine, donneraient les dimensions du lit qui répondraient à chaque section, et par conséquent à la dépense de cette riviere, dans chaque cas : on pourrait donc nommer ce lit d'un pied quarré de section, *lit de régime de la Seine* ; et il servirait à déterminer les dimensions du lit de cette riviere pour chaque accrue permanente, en supposant toujours homogene le sol dans lequel est creusé le lit, et la vîtesse de régime constante.

2° On trouve que le lit moyen de l'Escaut, entre Condé et Valenciennes, creusé dans un argile propre à faire des briques, a 156 pieds quarrés de section, sur 37 pieds de paroi développée; son rayon moyen est donc égal à $4^{pi},216$. Si on cherche (62) quel serait le lit rectangulaire, ou le lit trapeze avec des talus de la $\frac{4}{3}$ de hauteur, dans lequel on aurait même section et même paroi, on trouvera que ce lit aurait 24 pieds de largeur réelle ou moyenne, et $6^{pi},5$ de profondeur; et si, au moyen de ces dimensions, on cherche (118) celles *du lit de régime*, d'un pied quarré de section, on trouvera qu'il aurait $1^{pi},4499$ de largeur, sur 0,6897 de hauteur. Ces deux dimensions sont entre

elles dans le rapport de 2,102 à 1, tandis que celles du lit de régime de la Seine sont dans le rapport de 2,399 à 1 : cette différence paraît produite par celle du sol dont sont formés ces deux différents lits : car s'il pouvait exister une nature de terrain, dans lequel la largeur du lit de régime ne fût exactement que double de la profondeur, la figure de ce lit serait constante pour des sections et des dépenses quelconques, comme il est aisé de s'en convaincre, en considérant le second membre de l'équation $h+y=\frac{\sqrt{8Sl^2h^2+S^2(l-2h)^2}-S(l-2h)}{4hl}$, dans lequel les quantités $S^2(l-2h)^2$ et $S(l-2h)$ se réduisent à zéro, lorsque $l=2h$; ce qui donne constamment $h+y=\sqrt{\frac{S}{2}}=\sqrt{\frac{D}{2V}}$, ainsi qu'on l'a vu (110).

Mais en voilà assez sur cet objet, pour engager les hydrauliciens à étudier le cours des différentes rivieres qu'ils seront à portée d'examiner, dans la vue de fixer les différents lits de régime qui conviennent aux différentes espèces de terrains, en ne séparant point cependant cette observation de celle de la vîtesse de régime, dans les parties où le lit paraîtra avoir de la stabilité. Disons à-présent un mot de l'augmentation de pente que produisent les coudes sur toute la longueur du cours d'une riviere.

121. Quand le cours d'une riviere n'est pas direct d'une accrue à l'autre, le lit se replie sur lui-même par plusieurs sinuosités, qui augmentent son dé-

veloppement; et il s'y forme une certaine quantité de bricoles, dont le nombre est d'autant plus grand que le rapport du cours développé au cours direct est plus grand. Ainsi, en nommant N le nombre des bricoles, C le cours développé d'une accrue à l'autre, et c le cours direct correspondant, N sera proportionnel à $\frac{C}{c}$.

D'un autre côté, plus le lit est étroit, plus il s'y forme de coudes et de bricoles dans une partie égale de la longueur du cours direct: car nous avons vu que les rayons des arrondissements des sinuosités sont proportionnels à la largeur de la riviere, toutes choses égales d'ailleurs. Ainsi nommant L la largeur du lit vers l'embouchure de la riviere, et l la largeur du lit moyen entre deux accrues, le nombre des bricoles N sera aussi proportionnel à $\frac{L}{l}$.

Enfin, si près de l'embouchure il se forme communément une bricole sur une partie du cours direct, exprimé par un nombre de toises n, il se formera d'autant plus de bricoles d'une accrue à l'autre, que le lit direct aura pour longueur un plus grand nombre de fois n; ainsi le nombre de bricoles N sera encore proportionnel à $\frac{C}{n}$.

Il suit de là que le nombre de bricoles qui se forment d'une accrue à l'autre, ou $N = \frac{CLc}{cln} = \frac{CL}{ln}$. D'après ces principes, si on reprend le cours de la Seine, pour se faire une idée générale de la pente

l'augmentation de pente due à la résistance des coudes, depuis la source jusqu'à l'embouchure de la Seine. Au reste, ce calcul n'est qu'une évaluation fort en gros, qui peut être susceptible d'augmentation vers la source, où le nombre des bricoles excédera de beaucoup celui de 4008, que nous avons trouvé pour un lit moyen, ou de diminution, si la riviere affectait de faire de grandes sinuosités arrondies, sur des rayons beaucoup plus grands que sept fois sa largeur.

122. La propriété qu'a une riviere de former des îles est une marque de la grandeur de sa pente, et vient principalement du manque d'exactitude dans le tracé des sinuosités. Si les rayons des arcs de ses coudes sont trop grands ou trop petits, de sorte que le fil de l'eau ne soit pas régulièrement réfléchi de bricole en bricole, dans les parties droites du lit, ce lit aura de la disposition à faire des fouilles et des dépôts, qui donneront lieu à la formation des îles; le courant, partagé en deux bras, aura besoin d'une plus grande pente, et les rayons des arrondissements se trouveront à-peu-près proportionnés aux nouvelles largeurs des lits séparés. Il est probable que dans l'antiquité les lits de la plupart des fleuves étaient plus élevés qu'aujourd'hui, mais que le rapport de leur largeur à leur profondeur était moindre, en sorte que les rayons de leurs arrondissements ayant été alors multiples d'une moindre largeur, se trouvent aujourd'hui hors de la proportion convenable, sans néanmoins que le courant puisse se déplacer

pour rétablir ce rapport, parce que le fond ou les berges ont acquis trop de consistance : ainsi le seul moyen que la nature puisse employer pour substituer un autre ordre au premier, est de rétrécir le lit en le partageant, de sorte que s'il faisait auparavant trois bricoles irrégulieres, il en puisse faire quatre régulieres ; ou s'il en faisait quatre, il en puisse faire cinq, etc.

Il est clair que l'établissement du lit d'une riviere qui forme deux bras, pour embrasser une île, rentre dans le cas de deux lits différents qui se réunissent à un confluent ; il y a un rapport déterminé, dans le cas où il y a stabilité, entre la largeur, la profondeur et la pente du lit commun, et celles des lits séparés, pourvu néanmoins que l'île ait assez de longueur pour que le régime du courant y soit exact, c'est-à-dire que l'ordre des vîtesses des différents filets soit bien établi. Nous n'entrerons point à ce sujet dans un plus grand détail, qui ne pourrait répondre qu'à un très-petit nombre de cas. Venons enfin au problême des accrues périodiques, qui apprend à déterminer de combien l'eau s'éleve dans un lit donné, pour dépenser une plus grande quantité d'eau, produite par les pluies accidentelles ou par la fonte des neiges.

PROBLÊME.

123. Connaissant la pente, la profondeur, la largeur de la base d'un lit rectangulaire ou trapeze, et par conséquent la dépense d'une riviere ; déterminer de combien sa section doit s'élever, si

la dépense vient à augmenter d'une quantité connue.

SOLUTION.

Soient D la dépense connue, et h la hauteur totale pendant l'accrue, pour le lit rectangulaire, $\frac{1}{b}$ la pente constante, l la largeur, nous avons vu (112) que l'on a dans un courant uniforme quelconque $\sqrt{r}=\frac{V}{\frac{297}{\sqrt{B}}-0,3}+0,1$; élevant au quarré, mettant pour r et V leurs valeurs $\frac{lh}{l+2h}$ et $\frac{D}{lh}$, et faisant, pour abréger $\frac{297}{\sqrt{B}}-0,3=K$, l'équation deviendra $\frac{lh}{l+2h}=\left(\frac{D}{lhK}+0,1\right)^2$; élevant le second membre au quarré, et réduisant, on a une équation qui peut se résoudre par les méthodes ordinaires du troisieme degré ; mais elle devient extrêmement compliquée, sur-tout si le lit est trop petit pour négliger la quantité 0,1 qui affecte les quatre derniers termes.

124. Pour éviter les calculs dont cette solution est hérissée, on peut se servir d'une méthode d'approximation suffisante et plus expéditive, fondée sur ce qu'un changement dans une des dimensions de la section influe bien davantage sur la valeur de la dépense et de la section que sur celle du rayon moyen ; ayant donc estimé vaguement la dimension inconnue, qui est ici la hauteur, on s'en servira pour former le rayon moyen, et alors l'équation $\sqrt{r}=\frac{D}{lh\left(\frac{297}{\sqrt{B}}-0,3\right)}+0,1$ donnera une premiere

valeur approchée de la hauteur, qui ordinairement n'excédera pas d'un dixieme la véritable, quand même on l'aurait d'abord supposée trop faible d'un tiers. Cette valeur servira à rectifier la premiere, par une seconde opération, qui sera le plus souvent suffisante.

Pour donner un exemple de ce calcul, nous supposerons une riviere qui écoule 1500 pieds cubes d'eau par seconde, avec une vîtesse de 20 pouces, dans un lit rectangulaire de 150 pieds de largeur sur 6 de hauteur, avec une pente de $\frac{1}{12000}$, ou environ 7 lignes par 100 toises: pour connaître l'élévation et la vîtesse qui aurait lieu si la dépense était triplée par une accrue, on observera que, si la vîtesse restait la même, la hauteur serait triplée, et deviendrait égale à 18 pieds; mais puisque la moindre augmentation de la profondeur du lit fait croître le rayon moyen, et par conséquent aussi la vîtesse, cette profondeur doit être moindre que le triple de 6 pieds. Supposons-la donc d'abord de 12 pieds, et formons-en le rayon moyen, qui sera de $10^{pi},34483 = 124^{po},138$; alors l'équation $\sqrt{r} - 0,1 = \frac{D}{lh\left(\frac{297}{\sqrt{B}} - 0,3\right)}$ ou $h = \frac{D}{l(\sqrt{r} - 0,1)\left(\frac{297}{\sqrt{B}} - 0,3\right)}$, et dans laquelle on a $\sqrt{B} = 107,8$; $D = 4500$ pi.; $\sqrt{r} - 0,1 = 11,0417$, donnera $h = 13,276$, tandis que nous l'avions estimée de 12 pieds. Il suit de là que la valeur du rayon moyen, que nous avons d'abord calculée, a été trop faible, ce qui nous a fait trouver une valeur de h un peu trop forte. Cette vraie valeur de h doit toujours être entre

celle qu'on a calculée et celle qu'on a estimée, mais beaucoup plus près de la premiere que de la seconde : en effet, si on suppose la hauteur égale à $12^{pi},8773$, le rayon moyen devient $131^{po},8836$, et on en déduit par la formule $h = 12^{pi},8773$, c'est-à-dire la valeur exacte de la profondeur du lit, puisqu'elle est égale à celle dont le rayon moyen est formé.

Mais une seconde estimation aussi précise ne peut pas être faite au hasard; elle est fondée sur une méthode d'approximation assez exacte, pour dispenser d'en vérifier le résultat. Rien n'est plus aisé que ces sortes de méthodes ; voici, une fois pour toutes, en quoi consiste celle-ci, chacun pouvant d'ailleurs s'en faire une à sa maniere.

125. Puisque la hauteur précise du courant, dont la dépense est triple, doit se rapprocher davantage de $13^{pi},276$ que de 12 pieds, supposons cette derniere augmentée de $0^{pi},9$, on aura par conséquent $\sqrt{r} - 0,1 = 11,3927$, et $h = 12^{pi},867$, au lieu de $13^{pi},276$: cette quantité diminue donc de $0^{pi},409$, lorsque la premiere hauteur est augmentée de $0^{pi},9$. Or, avec des quantités qui different déja si peu, on ne peut pas tomber dans une erreur sensible, en supposant que si 12 pieds augmentent de la quantité $x \times 0,9$, l'autre quantité $13^{pi},276$ doit diminuer proportionnellement de la quantité $x \times 0,409$: ainsi pour que la valeur estimée de h coïncide à celle qui doit être calculée, il faut qu'on ait l'équation $12 + x \times 0,9 = 13,276 - x \times 0,409$, d'où l'on conclut $x = \frac{1,276}{1,309} = 0,9748$: ainsi la

quantité qu'il faut ajouter à 12 pieds, au lieu d'être $0^{pi},9$, est $0,9748 \times 0^{pi},9$, c'est-à-dire $0^{pi},8773$, ce qui donne $h=12^{pi},8773$.

Si d'après cette hauteur et la formule du mouvement uniforme, on cherche quelle sera la vitesse moyenne pendant l'accrue, on la trouvera de $27^{po},95$, au lieu de 20 pouces, qui est celle du lit ordinaire. On aurait encore le même résultat, en divisant simplement la dépense, 4500 pieds cubes, par la section $150^{pi} \times 12^{pi},8773 = 1931^{pi},595$.

126. Si la section du lit, au lieu d'être rectangulaire, était un trapeze au talus des $\frac{4}{3}$, et qu'avant l'accrue il fût égal au lit rectangulaire, sa hauteur étant toujours de 6 pieds, le fond aurait 142 pieds de largeur. Si on suppose que la dépense vienne aussi à tripler, et qu'on emploie la méthode précédente; on trouvera que la hauteur pendant l'accrue devient égale à $12^{pi},36$; la section, 1959 pieds, et la vitesse moyenne, $27^{po},57$. La hauteur et la vitesse augmentent moins, dans ce dernier cas, parce que la section s'accroît davantage par le talus; et cet effet deviendrait encore plus sensible, si la riviere était moins large qu'on ne l'a supposé.

On pourrait se proposer le problême inverse du précédent, c'est-à-dire de déterminer de combien une riviere s'abaisse, lorsque sa dépense diminue d'une quantité connue, pendant les sécheresses.

CHAPITRE II.

Des redressements des rivieres, et des changements que l'on peut faire à leur cours ou à leur lit.

127. Il y a plusieurs cas où la nature semble avoir besoin du secours de l'art, pour modérer le cours des rivieres, qui passent quelquefois d'un état réglé, dans lequel elles font l'ornement, l'abondance et la richesse d'une province, à des crues extraordinaires, et à des débordements qui entraînent à leur suite la terreur, le désordre, le ravage et la mort. On voit de temps en temps, et certains hivers en sont des époques mémorables, les fleuves, grossis par des pluies ou des fontes de neiges trop subites, sortir de leurs lits, et répandre avec leurs eaux dans les plaines et les vallées les fléaux d'un nouveau déluge. La perte des récoltes et des pâturages, la destruction des bestiaux, la chûte des maisons et des édifices, la ruine des ponts et des chaussées publiques, les horreurs de la famine ne sont pas les seuls maux qui inondent alors l'humanité; les eaux laissent, en se retirant même, un germe de corruption et de mort dans de vastes prairies, où l'humidité croupissante produit des exhalaisons puantes et mortelles, qui infectent l'air; et ceux que l'eau avait épargnés périssent souvent par l'influence empestée de ces vapeurs malignes.

Il faut convenir que quand ce sont de grands fleuves qui causent ces calamités, il y a peu de remede ; les travaux qu'il faudrait faire pour les prévenir sont presque au-dessus des forces humaines. Mais si le mal ne vient que de rivieres médiocres, il paraît qu'on peut entreprendre de les contenir dans leur lit ; et le moyen qui se présente le plus naturellement est celui des redressements.

La plupart des rivieres forment des sinuosités considérables, qui allongent le développement de leur cours, et diminuent par conséquent la pente réelle du lit. Si une riviére, pour parcourir 100000 toises de longueur directe, avec 100 pieds de chûte d'une extrémité à l'autre, fait 200000 toises de cours développé, il est clair que sa pente, qui serait de $\frac{1}{6000}$ sans sinuosités, se réduit réellement à $\frac{1}{12000}$, et la vîtesse se trouve diminuée non-seulement par la diminution de la pente, mais encore par la résistance de tous les coudes, qui ne peut être vaincue que par une partie de la chûte totale : or, si, lors des accrues extraordinaires, cette riviere ne peut contenir toutes ses eaux dans son lit, et est sujette aux débordements, il est clair qu'elle cesserait de l'être, si on coupait quelques-unes de ses sinuosités répandues sur tout son cours, puisque cette opération augmenterait la pente, en diminuant la longueur développée du cours. Il est vrai qu'on pourrait par-là s'exposer à quelques inconvénients, si le redressement était trop considérable, et comme on contrarie en cela

la nature, il faut bien de la circonspection pour le faire impunément. Voyons d'abord en général quel est l'effet d'un redressement, par rapport à la hauteur de l'eau contenue dans le lit.

PROBLÊME.

128. La largeur, la profondeur et la pente d'une riviere étant données, quand elle coule à plein bord, dans le temps des grandes crues, dans un lit sinueux, dont on connaît toutes les sinuosités; déterminer de combien ses eaux baisseraient, si on redressait son cours d'une quantité connue, en coupant quelques-unes des sinuosités les plus nuisibles.

Pour résoudre ce problême, il faut supposer, 1° qu'on aura mesuré la vîtesse moyenne du courant, qui, dans ce cas, ne peut pas se calculer exactement par la formule, à cause de la résistance des coudes, qui augmentent la pente due à la vîtesse; 2° que, par un nivellement très-exact, on se sera assuré de la différence de niveau de la surface de l'eau de la riviere, sur une longueur suffisante; 3° qu'on connaîtra le nombre et l'espece de toutes les bricoles qui se forment sur cette longueur.

D'après ces données, on calculera d'abord quelle est la dépense de la riviere, en multipliant sa section connue par sa vîtesse moyenne, conclue de la mesure immédiate de celle à la surface, prise dans une partie droite du lit, le plus loin qu'on pourra des sinuosités qui pourraient trou-

bler l'ordre des vîtesses partielles du lit ; et on nommera D cette dépense. On calculera ensuite, *sur* la longueur du lit qu'on aura choisie, quelle est la partie de la pente qui est due à la somme de toutes les bricoles ; et après l'avoir retranchée de la pente totale de cette partie du lit, on vérifiera si le reste de la pente est suffisant, suivant la formule, pour imprimer au courant la vîtesse qu'on a trouvée par l'observation : au cas que cela soit, on déterminera de combien la coupure des sinuosités, qu'on projette de redresser, raccourcit le développement du lit, et combien de bricoles se trouvent par-là supprimées ; on fera une somme de la nouvelle pente, ajoutée à la chûte due aux bricoles supprimées, et on nommera cette pente $\frac{1}{b}$.

La largeur ne devant point changer, sera nommée l, et la hauteur cherchée du lit, h ; enfin, pour éviter, comme ci-devant (124), les difficultés d'un problême, qui renferme toujours une équation du troisieme degré, on supposera de même une hauteur moindre que celle du lit, avant le redressement, d'après laquelle on cherchera la valeur du rayon moyen. L'équation $h = \frac{D}{l(\sqrt{r} - 0,1)\left(\frac{297}{\sqrt{B}} - 0,3\right)}$ donnera la valeur approchée de h, et on achevera le calcul de cette quantité, par la méthode d'approximation (125).

On sent bien que pour donner à cette solution toute l'exactitude dont elle est susceptible, il faut supposer que, dans les autres parties du lit, au-

dessus et au-dessous de celle dont il s'agit, on fera des redressements semblables, qui, en accélérant aussi la vîtesse, permettront à la section de la riviere de s'y abaisser proportionnellement.

129. Il faut convenir que ce moyen de remédier aux débordements et de prévenir la rupture des digues est frayeux ; mais rien n'oblige de le faire tout-à-coup ; il arrivera même souvent que, comme il va au principe du mal, il coûtera moins en effet que mille petits moyens qu'on emploie l'un après l'autre pour se garantir de l'injure des eaux. Combien ne dépense-t-on pas en effet en réparations de digues, quand elles ont été emportées ; en épis, en canaux de desséchement, en exhaussement des rues et des maisons des villes, et en curements devenus nécessaires ; sans parler de la superficie du terrain que consomment souvent en pure perte les sinuosités des rivieres, de l'embarras pour le tirage des bateaux, et de la perte de temps qu'essuie la navigation ?

Mais il serait dangereux de redresser les sinuosités d'une riviere, dans une portion de son cours seulement, sans en faire autant dans le reste de l'espace qu'elle parcourt jusqu'à la mer, ou jusqu'à la riviere principale qui reçoit ses eaux ; en agir ainsi, ce serait soulager un canton pour en submerger un autre : car l'eau, en parcourant avec vîtesse les espaces où l'on aurait fait les premiers redressements, se porterait avec abondance, en moins de temps pendant les accrues, dans ceux où la pente n'aurait point reçu d'augmentation, et y

causerait des débordements beaucoup plus consirables qu'auparavant.

130. Il y a donc deux manieres de s'y prendre, quand on veut travailler aux redressements d'une riviere, pour le soulagement des riverains : la premiere est d'entamer ces redressements par les parties les plus voisines de l'embouchure ou du confluent avec la riviere principale, et de perfectionner l'ouvrage par degrés, en remontant jusqu'à l'endroit où on juge ce travail utile.

La seconde maniere, et la plus parfaite, est de commencer à-la-fois les principaux redressements, sur le cours entier de la riviere, en laissant des intervalles à-peu-près égaux, et n'entreprenant que ce que les fonds qu'on y destine annuellement permettent d'exécuter chaque année : ainsi une sinuosité redressée de demi-lieue en demi-lieue, ou de lieue en lieue, sera le travail de la premiere année; ensuite on fera de nouveaux redressements dans les intervalles des premiers, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la riviere soit baissée au point qu'on desire, et qu'elle ne sorte plus de son lit, dans les plus grandes crues. Si cette riviere, qu'on peut supposer importante pour la navigation, n'avait plus assez de profondeur pour porter bateau dans les temps de sécheresse, on pratiquerait de distance en distance des écluses ou des sas, pour soutenir ses eaux ; mais on aurait la plus grande attention de tenir ces écluses ouvertes tout le temps où les eaux de la riviere suffiraient à la navigation, et, à plus forte raison, aux premieres

apparences de crues d'eau; on les tiendrait encore ouvertes une fois par semaine, le dimanche tout entier, même en temps de sécheresse, afin de profiter du chômage de tous les moulins situés sur les petites rivieres et les ruisseaux voisins, dont les meûniers auraient ordre d'ouvrir le même jour les écluses, pour qu'en rassemblant à-la-fois le plus d'eau possible, et la faisant courir avec toute la pente naturelle de la riviere, elle lave le lit, et emporte les dépôts qu'occasionnent toujours les tenues, en ralentissant le cours de l'eau.

131. Nous osons dire que cette maniere de travailler aux redressements est la plus équitable et la moins coûteuse : la plus équitable, en ce que l'imposition se faisant sur le pays, tous les riverains jouiront en même temps d'un soulagement proportionné à la taxe qu'ils auront payée; et la moins coûteuse, en ce que l'expérience, qui surpasse toujours la théorie en évidence aux yeux du commun des hommes, fera voir les avantages et les progrès du remede, ainsi que le terme où il faudra s'arrêter, pour ne point faire de dépense superflue : car l'abaissement des niveaux de la riviere se faisant par degré d'année en année, on aura tout le loisir de discuter le point où il conviendra de s'arrêter, pour concilier tous les intérêts.

132. Cependant, comme tout excès est nuisible, il pourrait arriver qu'en faisant trop de redressements à une riviere, on donnât lieu à des accidents presque aussi fâcheux que ceux que l'on voulait

éviter : car la vîtesse du courant, devenue plus rapide par l'augmentation de la pente, pourrait l'être au point de creuser le lit et de ronger les berges ; ce qui donnerait lieu à plusieurs dégâts, dont le moindre serait de rendre le lit variable et incertain, de confondre les propriétés, et de bouleverser les possessions des riverains, sans parler des effets plus funestes encore qui pourraient en résulter dans les villes et les villages, où les bâtiments, les ponts et les quais seraient en danger d'être minés peu-à-peu par-dessous, et d'être renversés.

Pour prévenir ces malheurs, et en considérant, d'un autre côté, que les inconvénients des grandes crues ne sont ordinairement causés que par le dernier, ou tout au plus les deux derniers pieds d'accroissement des eaux, on pourra s'attacher à ne prévenir que cette hauteur excessive, en retenant simplement les rivieres dans leur lit; et à ce sujet on peut proposer le problême suivant.

PROBLÊME.

133. La largeur, la profondeur, la vîtesse et la pente d'une riviere étant données, avec le nombre et la nature de ses sinuosités ; déterminer la pente qu'il faudrait lui donner, et par conséquent les redressements à faire, pour que sa hauteur baissât et fût égale à une donnée, en conservant la largeur ordinaire du lit.

Puisqu'on suppose connues la section et la vîtesse d'une riviere, dans le temps de ses plus

grandes crues, on connaîtra la dépense. D'un autre côté, on a fixé une hauteur de section moindre que la premiere, où l'on veut que les eaux puissent arriver sans la passer, et la largeur reste constante; ainsi la nouvelle section est aussi connue : on divisera la dépense par cette nouvelle section, et l'on aura la vîtesse moyenne uniforme de la riviere. La seule inconnue est donc la pente due à cette vîtesse moyenne; mais comme on a (62) l'équation $\sqrt{b} - \text{L.} \sqrt{b + 1{,}6} = \frac{297(\sqrt{r} - 0{,}1)}{V + 0{,}3(\sqrt{r} - 0{,}1)}$, on trouvera aisément la valeur de b, et par conséquent la pente $\frac{1}{b}$.

Mais cela ne suffit pas : car quoiqu'on connaisse, selon l'énoncé du problême, la pente totale de la riviere, avant le redressement, qu'on peut exprimer par $\frac{1}{B}$, et la pente destinée à vaincre la résistance du lit direct après le redressement, $\frac{1}{b}$, il ne s'ensuit pas que les longueurs développées du lit dans les deux cas doivent être :: b : B, parce que le lit, redressé en partie, doit conserver un certain nombre de coudes dont il faut vaincre la résistance : ainsi $\frac{1}{b}$ est trop petit, ou le dénominateur b est trop grand. On peut donc faire ce raisonnement : Si la riviere, après le redressement, ne conservait aucune sinuosité, la pente devrait être égale à $\frac{1}{b}$; mais, après l'examen préliminaire des principales sinuosités qu'il faudra couper, il restera sur la longueur b un certain nombre de bricoles, dont la résistance totale, relative à la nou-

velle vîtesse, sera, si l'on veut, exprimée par m. Donc la pente est $\frac{1+m}{b}$, c'est-à-dire qu'il faut tellement régler le nombre et l'espece des redressements, que la pente sur la longueur b soit égale à $1+m$.

134. Mais si une riviere était assez encaissée pour n'avoir point à craindre de débordement dans le temps des crues, que cependant sa vîtesse fût alors plus grande qu'il ne convient au régime, de sorte que son lit fût variable, et menaçât, par ses déplacements, de causer de grands dommages, ou bien que dans le temps où les eaux sont réglées, et à leur hauteur moyenne, la profondeur ne fût pas suffisante pour rendre la riviere navigable, ou au moins flottable, on pourrait desirer de diminuer sa vîtesse lors des crues, en la rendant égale à une donnée, ou d'augmenter sa profondeur dans l'état moyen, en la rendant égale à une autre donnée : or, dans ces deux cas, on ne peut remplir les conditions demandées, qu'en allongeant son cours, en lui faisant faire de nouvelles sinuosités, ajoutées de distance en distance aux anciennes, dans les lieux les plus propres à cela, et en conservant cependant au lit la même largeur qu'il avait d'abord. On peut donc proposer les deux problêmes suivants.

PROBLÊME.

135. Une riviere dont le régime n'est pas établi, ou dont la vîtesse, dans le temps des crues, est trop grande, étant donnée avec sa pente, sa section, sa vîtesse, et ses coudes; déterminer de combien il

faudrait augmenter le développement de son cours pour que sa vîtesse devînt convenable au régime.

Pour rendre plus sensible la solution de ce problême, nous en ferons l'application à une riviere qui a 50 pieds de largeur sur 8 de profondeur, dans le temps de ses plus grandes crues, avec une pente de $\frac{1}{8000}$, et des sinuosités telles qu'elles augmentent cette pente de $\frac{1}{25}$, en sorte que la pente réelle est égale $\frac{1}{7680}$, et que pour 40000 toises de longueur de cours direct, le lit a 60000 toises de longueur développée, avec une vîtesse de $26^{po},948$ par seconde. On demande de réduire cette vîtesse à celle de 24 pouces, en conservant au lit la même largeur, et en allongeant seulement sa longueur développée, répondante à 40000 toises de cours direct.

SOLUTION.

Puisque le lit développé a 60000 toises de longueur, avec une certaine quantité de coudes connue, on peut supposer qu'en augmentant ce développement, on augmentera le nombre des coudes dans le même rapport, et par conséquent aussi la résistance de ces coudes : ainsi la pente totale de la riviere étant égale à $\frac{1}{7680}$, la différence de niveau sur la longueur développée de 60000 toises est de $46^{pi},875$, dont le 25e ou $1^{pi},75$ sont employés à vaincre la résistance des premiers coudes, avec la vîtesse de $26^{po},948$: or cette résistance étant proportionnelle au quarré des vîtesses, elle se réduira à $1^{pi},386$, avec la vîtesse de 24 pouces; et si on nomme x le rapport du premier allongement, causé

par les premieres sinuosités, à l'allongement total causé par toutes les sinuosités, cet allongement total sera $x \times 20000$ toises, et la résistance totale des coudes sera aussi $x \times 1^{pi},386$.

Pour connaître la longueur du nouveau cours, il faut considérer que, si on divise la dépense de la riviere, qui est de $898^{pi},267$ par seconde, par la nouvelle vîtesse de 24 pouces ou 2 pieds, le quotient $449^{pi},133$ sera la section du nouveau lit, et cette quantité, divisée par la largeur du lit ou 50 pieds, donne $8^{pi},982$ pour la hauteur; son rayon moyen sera de $6^{pi},608$, ou $79^{po},296$: en cherchant la pente relative à un tel rayon moyen et à la vîtesse de 24 pouces, on la trouvera égale à $\frac{1}{12893}$.

On peut alors former l'équation suivante : $\frac{46,875-1,386x}{240000pi+120000x}=\frac{1}{12893}$; c'est-à-dire que la différence de niveau employée à vaincre la résistance seule du lit, avec la vîtesse de 24 pouces, divisée par 240000 pieds de longueur, plus $120000x$, qui est la quantité dont les sinuosités allongent le cours, est égale à la pente que nous venons de trouver; ce qui donne $x=2,6418$.

Ainsi l'augmentation de lit, causée par les sinuosités, devient égale à 52836 toises, au lieu de 20000; la longueur totale développée est de 92836 toises; et la partie de la pente employée à vaincre la résistance des coudes, sera de $3^{pi},6615$.

On voit donc que, pour obtenir l'avantage que l'on s'est proposé, il faudrait creuser près de 33000

toises de nouveau lit, opération trop coûteuse pour être entreprise par préférence aux autres moyens qu'on peut trouver de fixer l'inconstance de ce lit. Venons au second problême.

PROBLÊME.

136. Connaissant la largeur, la profondeur dans l'état moyen des eaux, la pente, la vîtesse et les coudes d'une riviere dont la vîtesse est trop grande dans le temps des crues; déterminer de combien il faudrait augmenter le développement de son cours, pour que sa profondeur devînt égale à une donnée convenable à la navigation ou au flottage.

Prenons encore pour exemple la même riviere que ci-dessus, dont la largeur, dans l'état ordinaire de ses moyennes eaux, se trouverait réduite à 40 pieds, et la profondeur moyenne à deux pieds, de sorte que vers le milieu du lit, la profondeur ne serait que d'environ 3 pieds, qui ne suffiraient pas pour la rendre navigable ou flottable avec commodité. On propose donc de déterminer, dans le cas où on voudrait allonger son cours, pour obliger sa section à s'élever jusqu'à 3 pieds de hauteur moyenne, la mesure de cet allongement.

On suppose, comme ci-devant, que le cours direct n'étant que de 40000 toises, la riviere en a déja 60000 de développement, à cause de ses sinuosités; que la pente totale de la riviere, sur cette longueur, est égale à $\frac{1}{7680}$, ce qui fait $46^{\text{pi}},875$, de différence de niveau d'un bout à l'autre desquels il y en a $46^{\text{pi}},346$ employés à vaincre la

résistance du lit, et seulement $0^{pi},529$ employés à vaincre celle des coudes ; la vîtesse n'étant que de $14^{po},858$ par seconde.

SOLUTION.

Puisque la riviere a 40 pieds de largeur sur 2 pieds de profondeur, avec une vîtesse de $14^{po},858$, sa dépense est de $99^{pi},05328$; et cette dépense, divisée par la nouvelle section proposée de 40^{pi} sur 5^{pi}, donne, dans ce cas, la vîtesse égale à $9^{po},905$; la résistance des coudes se trouvera donc réduite à 0,2359; le rayon moyen sera $2^{pi},60869$, ou $31^{po},30418$; la pente qui convient à ce rayon moyen et à la vîtesse, se trouvera (62) égale à $\frac{1}{28845}$.

Ainsi on pourra former, comme ci-devant, l'équation $\frac{46,875-0,2359x}{240000pi+120000x}=\frac{1}{28845}$, ce qui donne le rapport $x=8,77$: ainsi l'allongement $120000^{pi}\ x$, causé par les sinuosités, devient égal à 175400 toises, au lieu de 20000; la longueur totale développée du lit serait de 215400 toises; et la pente due à la somme de tous les coudes serait de $2^{pi},0688$.

137. On voit par-là l'impossibilité morale où l'on est de rendre navigable, par ce moyen, des rivieres dont il faudrait presque quadrupler le cours, pour gagner quelques pieds de plus en profondeur, au-delà de celle qu'elles ont naturellement : on est donc obligé, dans cette vue, de recourir aux tenues d'écluses, ou aux canaux de navigation paralleles aux rivieres. Il est vrai que ce dernier moyen est très-dispendieux, parce qu'outre le

long des rivieres, dans les parties basses, où elles ont accoutumé de sortir de leur lit. Il est vrai que ces digues ne rempliraient pas leur objet, si l'on n'en faisait de semblables aux rivieres de la seconde classe, qui aboutissent à la riviere principale : car quoiqu'il arrive le plus souvent que ces rivieres secondaires et les ruisseaux aient une pente beaucoup plus grande, et moins de disposition à élever leurs eaux à de grandes hauteurs par les crues, comme elles sont cependant retenues par l'élévation de la principale riviere, dans laquelle elles se jettent, il est nécessaire que leurs digues soient aussi élevées que les autres, du moins au confluent, et en remontant jusqu'à la distance nécessaire, pour que le remou des eaux de la riviere principale ne s'y fasse plus sentir. Les terrains compris entre ces digues respectives ne peuvent pas avoir d'écoulement, tant que durent les accrues ; et elles forment différentes petites inondations, qui ne peuvent se dessécher que par de petites vannes et des aquéducs pratiqués sous les digues, et lors seulement que les eaux des rivieres sont rentrées dans leurs lits.

Pour tirer de ces digues ou levées tout l'avantage qu'elles peuvent procurer, il est convenable de ne les pas faire immédiatement au bord des rivieres, où il est à craindre que la rapidité du courant ne les attaque et ne les mine, mais à une distance de chaque rive qui soit proportionnée à la largeur du lit. On pourrait fixer cette distance à la moitié de la largeur du lit, afin que quand les eaux de la ri-

viere sortent du lit ordinaire, elles s'étendent dans un lit double, où la vîtesse des bords devient beaucoup moindre : l'espace compris entre la riviere et ses digues ne serait pas perdu ; on pourrait y laisser croître l'herbe, et en faire des pâturages, qui seraient ordinairement bons, à moins que la riviere ne chariât du sable fin, qui, en se déposant sur ces grandes bermes, les rendrait stériles.

CHAPITRE III.

De la dépense des reversoirs. Des vannages et des tenues d'écluse. De la hauteur et de l'amplitude des remous. Des ponts.

140. Après avoir examiné quelles sont les lois que suivent les eaux, quand elles coulent dans des lits uniformes et constants, il faut à-présent considérer comment, par une suite des mêmes lois, elles se détournent, s'élevent ou s'abaissent; comment elles retardent et accélerent leur mouvement, quand un obstacle s'oppose à l'uniformité de leur cours. Nous avons déja vu que quand l'eau est forcée à changer de direction, pour se plier dans un lit tortueux, elle emploie un effort égal au poids d'une certaine chûte; et elle perd, pour le reste de son mouvement uniforme, quelques degrés de vîtesse qu'elle aurait eus de plus, si elle eût eu cet obstacle de moins à vaincre.

L'industrie humaine, animée par le besoin, a imaginé d'employer l'action de l'eau à mouvoir des

machines qui soulagent sa faiblesse, et ménagent son repos. Voilà l'origine des moulins et des usines. La nécessité de communiquer avec ses voisins, quoique séparés d'eux par des barrieres naturelles, qui sont les fleuves et les rivieres, a donné lieu à la construction des ponts, qui, faits d'abord en bois, mais trop faibles et peu durables, ont été remplacés par des piles de maçonnerie, jointes ensemble par des arcades. Enfin la facilité de transporter par eau de gros fardeaux et des marchandises pesantes, a fait desirer de rendre navigables des rivieres qui n'y paraissaient pas propres, à cause de leur peu de profondeur; voilà l'origine des écluses. On ne peut remplir ces trois objets sans interrompre l'uniformité du cours des rivieres : c'est sous ce point de vue que nous allons les considérer dans ce chapitre. Ce n'est pas proprement des reversoirs, des ponts et des écluses que nous allons parler, mais plutôt de l'effet qui résulte de ces ouvrages sur l'état des rivieres, et du changement qu'ils occasionnent dans la hauteur, la vîtesse et la dépense des eaux. L'ordre des matieres et la clarté demandent que nous parlions d'abord de la dépense des reversoirs.

141. On sait qu'en général un reversoir est une digue solide, faite en terre, en maçonnerie ou en bois, qui traverse le lit d'un courant, dont elle force l'eau à s'élever, jusqu'à ce qu'ayant égalé sa hauteur, et la surpassant ensuite, elle reverse par dessus, et forme une chûte ou une nappe d'eau, pour retomber dans son lit inférieur.

On peut distinguer deux sortes de reversoirs, *les reversoirs complets* et *les demi-reversoirs*. J'appelle reversoir complet celui où l'eau passant sur un radier ou sur un seuil quelconque, considéré comme fort mince, tombe dans un bassin ou dans un lit inférieur, dont la surface est plus basse, ou du moins n'excede point le niveau du seuil du reversoir; et le demi-reversoir est celui où la surface du bassin ou du lit inférieur est plus haute que le seuil, tellement que l'eau ne reverse qu'en partie, tandis que le reste coule sans reverser. Mais on peut encore, dans chacun de ces deux cas, distinguer deux circonstances essentielles: la premiere, quand l'eau qui reverse part d'un réservoir entretenu constamment plein, et dont l'eau n'a point de mouvement propre qui concoure au reversement; la seconde, lorsque l'eau affluente au reversoir a déja un mouvement et une vîtesse acquise, dans la direction du reversoir. Sur cette matiere, ainsi divisée, on peut former plusieurs questions, qui vont faire le sujet d'autant de problêmes.

PROBLÊME.

142. Si dans une des faces d'un réservoir entretenu constamment plein d'une eau dormante, on pratique un reversoir d'une largeur et d'une profondeur données; on demande de déterminer la dépense d'eau qui s'y fera, le reversoir étant complet.

Soit un bassin ABCD, constamment entretenu plein, dont AB soit la superficie : si dans une de Fig. 16.

ses faces BC on pratique une ouverture par laquelle l'eau puisse s'échapper sur une hauteur BF, que nous nommerons h, et sur une largeur que nous nommerons l; on suppose que l'eau échappée du réservoir soit reçue dans un autre bassin ou lit inférieur, dont la surface soit plus basse que le point F, ou au moins de niveau à ce point; on demande quelle serait la dépense de ce reversoir.

SOLUTION.

Si l'eau pouvait se soutenir horizontalement jusqu'en B, la hauteur BF pourrait être considérée comme celle de l'orifice; et la chûte moyenne, due à la vîtesse de l'écoulement, serait égale à $\frac{4}{9}h$. Ainsi, en supposant aussi la contraction d'orifice nulle, la vîtesse moyenne serait exprimée par $\sqrt{2g\frac{4}{9}h} = \sqrt{724 \times \frac{4}{9}h}$, et la dépense serait $lh\sqrt{724 \times \frac{4}{9}h}$: c'est la théorie ordinaire.

Mais les effets naturels sont bien différents, et la premiere supposition est impossible: car l'eau, avant de parvenir au-dessus du reversoir, forme à sa surface une courbe, et elle éprouve une chûte qui diminue considérablement la hauteur de l'orifice, en conservant néanmoins la même charge BF, pour les filets inférieurs. Toutes choses alors se passent comme si l'eau s'écoulait par dessous une vanne abaissée de B en I, derriere laquelle l'eau se tiendrait de niveau à la superficie AB du bassin. Il est hors de doute que la hauteur IF doit dépendre de la hauteur entiere BF, et qu'il doit exister un rapport entre ces deux quantités; c'est ce que nos

expériences ont confirmé, et nous avons trouvé ce rapport : : 1 : 2. Il est vrai que nous n'avons point vérifié le fait par une mesure immédiate ; mais nous l'avons seulement déduit des dépenses relatives à différentes charges au-dessus du reversoir. Ainsi, sans pouvoir assurer que l'eau s'abaisse réellement, et exactement de la moitié de sa hauteur au-dessus du reversoir, on verra cependant que les dépenses, calculées d'après cette hypothese, s'accordent assez bien avec l'expérience.

Si du point B on décrit une parabole BEGK, la vîtesse des filets au point I sera représentée par IE, et celle des filets au point F le sera par FG; d'où l'on tirerait une solution synthétique : ou bien soient D la dépense par seconde du reversoir, h la hauteur entiere BF, 2G la quantité par laquelle il faut diviser le quarré de la vîtesse moyenne par seconde, pour avoir la hauteur de chûte qui lui est due; x la distance d'un point quelconque de la section au niveau B du bassin. Si on imagine la section divisée sur toute sa hauteur en une infinité de tranches égales, et de même hauteur, la hauteur d'une de ces tranches sera dx; la surface de cette tranche ldx; sa vîtesse $\sqrt{2Gx}$; sa dépense sera $l\sqrt{2G}x^{\frac{1}{2}}dx$; et on aura $D = Sl\sqrt{2G}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}l\sqrt{2G}x^{\frac{3}{2}} + c$. Pour déterminer la constante c, il faut remarquer que l'écoulement n'a pas lieu au-dessus de I, et qu'on a $D = 0$, lorsque $x = BI = \frac{1}{2}h$; ainsi $c = -\frac{2}{3}l\sqrt{2G}(\frac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}}$: alors $D = \frac{2}{3}l\sqrt{2G}(x^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}})$. Faisant $x = h$, pour avoir

l'intégrale complète, on aura $D=\frac{2}{3}l\sqrt{2G}(h^{\frac{3}{2}}-(\frac{1}{3}h)^{\frac{3}{2}})=0,431\,l\sqrt{2G}\,h^{\frac{3}{2}}$; ce qu'il fallait trouver.

143. Si on calcule, d'après cette formule, les quatre expériences que nous avons faites sur les reversoirs qu'on trouvera ci-après (410), en supposant $2G=681$, ou $\sqrt{2G}=26,1$, ainsi que nous l'avons fixé ci-devant (12), sous la dénomination de 724-K, et qu'on fasse $l=17^{po},25$, on aura le tableau suivant, qui présente la comparaison des dépenses calculées à celles de l'expérience.

Numéros des expériences.	Hauteurs du bassin, au-dessus du reversoir, ou valeur de *h*.	Dépenses des reversoirs, suivant la théorie.	Dépenses des reversoirs, suivant l'expérience.
	po.	po.	po.
185	1,8666	417,2	432,0
186	3,0000	1068,3	1004,4
187	4,3750	1775,7	1776,6
188	6,3333	3092,7	3110,4

On voit par ce tableau que les dépenses sont assez conformes à ce que nous venons d'établir; il semblerait que la première de ces expériences indiquât une contraction presque nulle, ce qui ne serait pas étonnant avec une aussi petite charge.

Il suit de là, que si la dépense d'un reversoir complet, pratiqué dans une des faces d'un bassin, entretenu plein d'eau dormante, était connue, ainsi que la largeur du reversoir, on connaîtrait aussi la hauteur de l'eau du bassin, au-dessus du

seuil du reversoir, ou h : car l'équation précédente donne $h=\left(\frac{D}{0,431\,l\sqrt{2G}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

PROBLÊME.

144. La dépense et la section d'une riviere étant connues, si on barre son cours par un reversoir, dont la hauteur au-dessus du fond de la riviere soit connue, et dont la largeur soit égale à celle de la riviere; déterminer la hauteur à laquelle l'eau de la riviere s'élevera au-dessus du reversoir, pour passer par dessus.

Dans le problême précédent nous avons supposé que l'eau passait du repos au mouvement, et qu'il y avait contraction sur trois faces de l'orifice; dans celui-ci on suppose que l'eau, avant de reverser, a déja une vîtesse acquise, et que la contraction n'a lieu qu'à la base inférieure de l'orifice du reversoir, puisque sa largeur égale celle de la riviere: nous ferons donc ici $2G = 700$ (12). Quant à la vîtesse déja acquise en arrivant au reversoir, elle est égale à la dépense divisée par la section de la riviere au-dessus du reversoir : car nous avons en effet remarqué dans notre canal, que l'eau du fond coulait jusqu'à l'amont du reversoir, et qu'après l'avoir choqué, elle se relevait, pour passer au-dessus.

SOLUTION.

Nommant donc a la hauteur du reversoir au-dessus du fond de la riviere, l la largeur commune à la riviere et au reversoir, h la hauteur de la sur-

face de la riviere, au-dessus du reversoir, et D la dépense commune ; $\frac{D}{l(a+h)}$ sera la vîtesse moyenne acquise avant de reverser, et $\left(\frac{D}{l\sqrt{2g}(a+h)}\right)^2$ sera la hauteur naturelle due à cette vîtesse : la premiere équation (143) donne $h = \left(\frac{D}{0{,}431\, l\sqrt{2G}}\right)^{\frac{2}{3}}$, quand l'eau d'amont est en repos : ainsi avec une vîtesse acquise, on aura $h = \left(\frac{D}{0{,}431\, l\sqrt{2G}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{D}{l\sqrt{2g}(a+h)}\right)^2$.

Sans chercher à compliquer cette équation, en dégageant h du second terme, on voit que la hauteur due à la vîtesse acquise est toujours peu considérable, relativement à h, et que cette quantité, estimée seulement dans le second terme, ne change pas sensiblement sa valeur réelle. D'ailleurs, en répétant l'opération, on peut corriger cette valeur, et l'obtenir avec une précision suffisante; ce qu'il fallait trouver.

145. C'est ainsi que nous avons calculé les expériences rapportées (413) à la suite des précédentes, et dont le tableau suivant offre le résultat.

Numéros des expériences.	Dépense des reversoirs par seconde.	Hauteur due à la vitesse sur le reversoir.	Hauteur due à la vîtesse acquise.	Hauteur calculée au-dessus du reversoir.	Hauteur au-dessus du reversoir, suivant l'expérience.
eme.		po.	po.	po.	po.
189	3888,0	7,302	0,625	6,677	6,583
190	2462,4	5,385	0,350	5,035	4,750
191	1112,4	3,171	0,116	3,055	3,166
192	259,2	1,2006	0,0114	1,189	1,250

On doit remarquer que dans ces expériences il n'était pas aisé de prendre en amont la plus grande

hauteur au-dessus du reversoir, qui s'en trouvait éloignée d'environ 5 pieds, autant que nous en avons pu juger, quoique cette distance ne dût pas être constante pour les différentes expériences. Ainsi nous ne pouvons pas garantir, à une ligne près, la justesse de nôs mesures.

PROBLÊME.

146. Connaissant la hauteur d'un reversoir non complet, au-dessus du fond d'une riviere, la hauteur constante de l'eau en aval du reversoir, plus grande que celle du reversoir, la hauteur de l'eau en amont au-dessus du reversoir, et la largeur commune du reversoir et de la riviere; déterminer la dépense du reversoir ou de la riviere.

Soit une riviere, dont le fond est MN, et la surface, élevée par le reversoir, LE, la hauteur du reversoir AB, la hauteur de l'eau inférieure BC > AB, et la largeur commune *l*, on demande la dépense commune. Fig. 17

SOLUTION.

Ce problême serait moins compliqué, si on supposait le bassin LFMB entretenu constamment plein d'eau sans mouvement; on pourrait alors supposer que le reversoir est complet sur la hauteur EC, et on trouverait la dépense de cette partie de la section par le problême du paragraphe 152. Quant à la dépense du reste de la section sur la hauteur CA, elle serait égale au produit de cette partie de la section par la hauteur due à la chûte

EC, qui est la différence des hauteurs de l'amont à l'aval du reversoir. La somme de ces deux dépenses serait celle du reversoir; mais, puisqu'on suppose que le reversoir est établi sur une riviere, sa dépense égalera celle de la riviere, dont l'eau, en arrivant au reversoir, aura une vîtesse acquise, qui sera due à une chûte qui pourra être exprimée par FE : or, cette vîtesse, multipliée par la section de la riviere, sur la hauteur EB, devra donner une dépense égale à celle du reversoir. Pour éluder cette complication, on pourrait chercher d'abord la dépense du reversoir, de la maniere que nous venons de dire, en ne supposant point de vîtesse acquise : cette dépense un peu trop faible étant divisée par la section FB, donnerait la vîtesse acquise un peu faible, mais extrêmement approchée; on connaîtrait donc la hauteur FE, au moyen de laquelle on serait en état de déterminer la vîtesse moyenne entre DG et CH, qui convient au réservoir complet, et celle CH qui convient à la partie plongée de la section. On pourrait enfin rectifier de nouveau la valeur de la vîtesse acquise et de sa chûte, etc.

147. Si on calcule de cette maniere la dépense que devrait faire le reversoir non-complet de notre cent quatre-vingt-treizieme expérience, on la trouvera peu différente de celle que nous avons trouvée. Cependant le calcul la donne un peu plus forte que l'expérience, ce qui pourrait être attribué à une augmentation de contraction, causée par la pente que prend la veine fluide du rever-

soir complet, qui diminue la dépense du bas de l'orifice au-dessus du reversoir.

148. Puisque nous savons calculer la hauteur à laquelle l'eau doit s'élever au-dessus d'un reversoir pour fournir à une dépense connue, si on ajoute à cette hauteur celle du reversoir au-dessus du fond du lit, et que de cette somme on retranche la profondeur uniforme de la riviere avant l'établissement du reversoir, on connaîtra l'exhaussement qu'il aura occasionné à la surface de l'eau de la riviere; c'est ce qu'on appelle le *remou*. Nous sommes donc en état de résoudre le problême général qui suit:

PROBLÊME.

La largeur, la profondeur et la pente d'une riviere étant données, si on barre son lit par une écluse et une vanne d'une hauteur et d'une largeur connues; déterminer la hauteur du remou en amont de la tenue, c'est-à-dire de combien la surface de l'eau de la riviere s'élevera, pour reverser en nappe par dessus la vanne.

SOLUTION.

Puisque la largeur, la profondeur et la pente de la riviere sont connues, on connaîtra aussi sa vitesse et la quantité d'eau qu'elle dépense; ainsi, par le problême précédent (144), on cherchera la hauteur dont la surface de l'eau s'élevera au-dessus du reversoir, dont la hauteur est aussi donnée; et, si de la somme de ces deux hauteurs on retranche

la profondeur ordinaire de la riviere, on aura la hauteur du remou qu'on demande. Appliquons cette solution à un exemple.

149. Supposons une riviere dont la profondeur dans les eaux moyennes est de 3 pieds, et le lit de 40 pieds de largeur, la pente un pouce et demi par 100 toises; et qu'en travers de son lit on ait dessein de construire une écluse, avec une vanne ou une tenue de poutrelles de 6 pieds de hauteur au-dessus du fond, sur 18 pieds de largeur de passage : on demande la hauteur du remou qu'occasionnera cette tenue.

La premiere opération qu'il faut faire est de déterminer la vîtesse et la dépense de la riviere dans son état naturel; et comme on a $l = 480^{po}$, $h = 36^{po}$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{4800}$, on trouvera, par la formule (51), $V = 23^{po},45$, et la dépense ou $D = 405216$ pouces cubes.

La contraction d'orifice au passage du reversoir ayant lieu sur trois côtés, nous pouvons faire $2G = 681$, et $\sqrt{2G} = 26,1$: on aura aussi $a = 72^{po}$, $2g = 724$. Ainsi l'équation $h = \left(\frac{D}{0,431\, l\sqrt{2G}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{D}{l\sqrt{2g}(a+h)}\right)^2$ devient $h = 30^{po},276 - 0^{po},094 = 30^{po},182$; ajoutant cette hauteur à celle de la vanne, la profondeur en amont de l'écluse sera $102^{po},182$, dont il faut retrancher 36 pouces, qui est la profondeur ordinaire de la riviere, pour avoir la hauteur du remou, qui est de $66^{po},182$; ce qu'il fallait trouver.

150. On sent bien que le remou fait gonfler les eaux de la riviere jusqu'à une distance assez grande de la tenue, mais que son effet diminue de plus en plus, jusqu'au point où il cesse d'être sensible, et où la riviere est réduite à sa profondeur ordinaire: nous supposons toujours que le lit conserve sa pente et sa largeur ordinaire. Ainsi la hauteur du lit, à partir du point où le remou cesse d'être sensible, jusqu'à la tenue, va toujours en croissant; et comme la dépense est constante, les vîtesses décroissent sensiblement en raison inverse des hauteurs, ce qui ne peut avoir lieu sans que la pente à la surface ne varie par la même cause. La surface de l'eau de la riviere forme donc, dans toute l'étendue du remou, que nous nommerons son amplitude, une courbe concave, tangente à la surface naturelle de l'eau de la riviere, à l'extrémité de cette amplitude. La nature et l'étendue de cette courbe ne peuvent être connues rigoureusement que par la formule du mouvement uniforme, qui, sous ce point de vue, devient trop compliquée.

Soit FKLB la coupe longitudinale d'une riviere dont la pente soit $\frac{1}{b}$, la profondeur FK ou BL$=h$, et la largeur l: soit aussi une tenue placée en B, qui fasse gonfler l'eau de la quantité BA, qu'on peut nommer H. Fig. 18.

J'observe d'abord que si la surface de l'eau, au-dessus de la tenue, pouvait être de niveau comme AG, le remou finirait en G, point dont il serait aisé de calculer la distance au point A; mais il n'est pas possible que la surface de l'eau en amont de

l'écluse soit horizontale : car pour cela il faudrait qu'elle n'eût aucun mouvement, ce qui est contraire à la supposition que l'eau fournie par la riviere reverse en A. L'eau y a donc une pente qui doit être proportionnée à la capacité du lit dans lequel elle coule : or, le lit étant plus profond près de l'écluse, à cause de la hauteur de la tenue, la pente y doit être moindre que par-tout ailleurs; et si cette pente est représentée par la ligne inclinée AD, cette ligne sera tangente à la courbe au point A, et elle rencontrera au point D la ligne FD, qui est le prolongement de la surface de la riviere. Cette ligne FD est elle-même tangente à la courbe FIA. Parmi toutes les suppositions qu'on peut faire sur la nature de cette courbe, arrêtons-nous un moment à celle du cercle, qui donne $AD = DF$, et proposons-nous le problême suivant.

PROBLÊME.

151. En supposant toutes les données du problême précédent, et dans l'hypothese que la courbe formée par la surface de l'eau au-dessus d'une tenue est un arc de cercle; déterminer l'amplitude du remou, et sa hauteur à une distance quelconque de la tenue.

Puisque la ligne AD doit être tangente à la surface de l'eau, pres de la tenue A, et avoir même pente que le courant au-dessus du reversoir, il faut d'abord chercher quelle est cette pente. Tout est connu ici, la largeur, la profondeur du lit, le rayon moyen, par conséquent, et la vîtesse, qui est égale

à la dépense de la riviere, divisée par la section. Ainsi la pente se déduira de ces données (62), et on aura $\frac{1}{B}$: soit tirée l'horizontale DC.

Considérons à-présent les deux triangles CDB, CDA, qui ont l'un et l'autre leur sommet au point D. La hauteur CB exprime la pente naturelle de la riviere sur la longueur DB, ou sur CD, qui lui est sensiblement égale; la hauteur CA exprime la pente de l'eau au-dessus de la tenne, sur la longueur DA, ou sur CD, qui lui est sensiblement égale; d'où il faut conclure que CB : CA : : B : b, c'est-à-dire comme les dénominateurs des deux pentes. Mais AB est connu, puisque c'est la hauteur du remou, que nous avons nommée H : ainsi on peut faire la proportion B $-$ b : b : : CB $-$ CA : : CA : : AB : CA. Donc CA $= \frac{AB \times b}{B - b} = \frac{Hb}{B-b}$; mais DA est égale à CA $\times$ B : ainsi on a DA $= \frac{HBb}{B-b}$, c'est-à-dire que la tangente DA, ou la moitié de l'amplitude du remou est égale au produit des deux dénominateurs des pentes par le remou, divisé par la différence des mêmes dénominateurs; et l'amplitude entiere FA $= \frac{2HBb}{B-b}$; ce qu'il fallait d'abord trouver.

On demande en second lieu de déterminer la hauteur du remou, à une distance quelconque de la tenne AB. Pour cela il faut considérer que l'arc AIF appartient à un cercle dont le diametre est presque infini par rapport à AB ou H : car, nommant R le rayon, on a, par la propriété du cercle, AB :

BF : BF :: AB : AB + 2R; d'où l'on tire $2R = \frac{BF^2}{AB} - AB$; et comme AB est toujours dans la pratique très-petit par rapport à BF, il suit que AB est sensiblement égal au quarré de la tangente, divisé par deux fois le rayon de l'arc AIF. On peut faire le même raisonnement pour ID, ou pour toute autre hauteur du remou : elle sera toujours sensiblement égale au quarré de la distance du point F, divisé par 2R; c'est-à-dire que la hauteur du remou décroît comme les quarrés des distances du point où on le considere, au point F, extrémité de l'amplitude du remou.

152. Pour appliquer cette théorie à un exemple, nous prendrons les mêmes donneés que dans le paragraphe 149, où nous avions $l = 480^{po}$; $h = 36^{po}$; $\frac{1}{b} = \frac{1}{4500}$; $V = 23^{po},45$; et la dépense D = 405216 pouces cubes. Nous avons trouvé la hauteur du remou, ou $H = 66^{po},182$: la section, au-dessus de la tenue, sera donc égale à $40^{pi} \times 8^{pi},515 = 340^{pi},6064$; la paroi sera de $57^{pi},03032$; le rayon moyen sera égal à $5^{pi},972373 = 71^{po},668476$; sa racine quarrée sera 8,4657, et $\sqrt{r} - 0,1 = 8,3657$; la vitesse au-dessus de la tenue sera égale à $8^{po},282$; ainsi on trouvera (62) le nombre 235,52 pour valeur de $\sqrt{B}$, et B = 55469,6.

La tangente à l'eau du reversoir étant égale à $\frac{HB\,b}{B-b}$, devient $347754^{po},5$, et l'amplitude entiere sera 695509 pouces, ou environ 9660 toises; le rayon R = 3619248264 pouces, ou 50267337 toises: on trouvera que le remou, au point I, est égal au

quart de celui AB, ou égal à 16po,545, et on pourra le calculer pour tout autre point.

153. Examinons à-présent si la supposition que nous avons faite, que la courbure de la surface de l'eau, au-dessus d'une tenue, était sensiblement un arc de cercle, remplit, du moins à-peu-près, la condition de l'égalité de la dépense dans le lit de la riviere, à chaque point de l'amplitude du remou. Nous venons de voir que le remou ID, au point D, qui est le milieu de l'amplitude totale, est de 16,545, ce qui donne 52po,545 de hauteur de section à ce point. Ainsi la section y est de 25222po,6; le rayon moyen 43,109, dont la racine est 6,565; et par conséquent $\sqrt{r} - 0,1 = 6,465$. Il nous reste à trouver la pente: or, elle est la même que celle de la corde FA; c'est-à-dire qu'elle est égale à $\frac{EA}{FA}$: or, $AB = H = 66,182$; $AC = \frac{347754,5}{55469,6} = 6,269$; $AB + AC = 72,451$, et, à cause de $EC = CB$, on a $EA = AB + 2AC = 78,72$. Ainsi la pente cherchée, qui répond au point I, est égale à $\frac{78,72}{695509}$ $= \frac{1}{8848}$.

Si on cherche, par la formule ordinaire du mouvement uniforme, la vîtesse qui répond à cette pente et au rayon moyen que nous venons de déterminer, on la trouvera égale à 19po,512, qui, étant multipliée par la section 25222,6, donne une dépense de 492142 pouces cubes, au lieu de 405216 seulement, qui est celle de la riviere. Il faut donc convenir que l'hypothese du cercle

donne en même temps une amplitude de remou trop grande, une hauteur de remou trop grande au point D, et par conséquent une section trop grande au même point; mais comme la hauteur de la section ne peut pas diminuer, sans que la pente ne diminue aussi en même temps, il résulte que l'erreur occasionnée par la supposition de l'arc de cercle est assez petite.

154. En réduisant le problême à ses véritables données, qui sont 1° la hauteur du remou AB; 2° la tangente AD, donnée de longueur, et de position par rapport à une ligne horizontale, et 3° la direction de la seconde tangente BDF, on peut supposer que la courbe AIF appartient, ou bien à une parabole dont l'axe est horizontal, et le sommet vers le côté d'amont, ou à une hyperbole équilatere, dont une asymptote est horizontale, et le sommet tourné du même côté, ou enfin à une ellipse dont le grand axe est vertical. Dans les deux premieres suppositions, on trouve DF < AD, et la hauteur du remou en D est trop petite pour donner, en la combinant avec la pente qui résulte de ces courbes, une dépense constamment égale à celle de la riviere; mais dans l'ellipse, en faisant DF un peu plus petit que AD, on trouve des sections et des pentes qui satisfont assez bien à toutes les conditions du problême.

Puisque l'arc de cercle donne, dans les points intermédiaires du remou, une pente trop grande, il doit donner une longueur totale de remou trop étendue: ainsi la totalité du remou, ou son am-

plitude, ne peut jamais égaler le double de la première tangente AD; mais elle doit toujours la surpasser; et telles sont les limites des plus grandes erreurs qu'on puisse faire à cet égard; on ne s'écarterait donc pas beaucoup de la vérité, en prenant pour amplitude $\frac{12}{10}$ de la tangente inférieure, c'est-à-dire en fixant son extrémité sur la tangente DF, à une distance du point D égale à $\frac{2}{10}$ AD; tirant ensuite une ligne droite entre les deux points extrêmes du remou, la courbure de la surface ne peut que garder à-peu-près le milieu de l'espace compris entre le milieu de cette corde et les deux tangentes. Ainsi une courbure quelconque, tangente aux deux extrémités, une ellipse, par exemple, dont le petit axe serait horizontal, donnerait, par le calcul, où même par une opération graphique, tous les points de la courbe, avec une précision suffisante.

Ces considérations font voir qu'il est plus curieux qu'utile de chercher la véritable courbe du remou : son équation différentielle ne peut être intégrée que par une série peu convergente, et qui oblige à des calculs aussi longs qu'inutiles.

155. De tout ce qui précede nous pouvons tirer une méthode d'approximation, pour calculer les longueurs qui se trouvent entre deux hauteurs de section connues, dans l'étendue du remou, pourvu que la différence de ces hauteurs soit beaucoup moindre que le remou.

Supposons que AD, BC représentent deux sections de la riviere, sur une certaine longueur Fig. 19.

longueur de notre canal, comprise entre la tête et le reversoir. Il en est de même des deux autres expériences, qui donnent la longueur de 22 toises, avec encore plus de précision, quoique les données soient très-différentes.

Dans la cent quatre-vingt-douzieme expérience on aura $P=5,272$; $p=3,666$; $\frac{1}{B}=\frac{1}{16820}$; $\frac{1}{b}=\frac{1}{929}$; $a=21$ toises 5 pieds 4 pouces 9 lignes. Dans la cent quatre-vingt-treizieme expérience on aura $P=10,0$; $p=6,0$; $\frac{1}{B}=\frac{1}{7460}$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{256}$; $a=22$ toises 0 pi. 0 po.

157. Enfin, pour finir cette discussion de la hauteur et de l'amplitude des remous, la méthode pratique la plus générale et la plus commode, à laquelle il paraît qu'on doit s'en tenir, est de chercher d'abord, par la formule du mouvement uniforme, quelle est l'expression $\frac{1}{B}$ de la pente que la surface de l'eau doit avoir au-dessus d'une tenue quelconque; et nommant H la hauteur du remou, $\frac{1}{b}$ la pente naturelle du lit de la riviere, et A l'amplitude entiere du remou, on fera $A=\frac{\frac{19HBb}{10}}{B-b}$. Quant aux hauteurs partielles du remou, on les fera proportionnelles aux quarrés des distances, à partir de l'extrémité du remou; ce qui donnera aisément, en y ajoutant la profondeur ordinaire de la riviere, les hauteurs qui répondent à des distances connues, ou les distances qui répondent à des hauteurs connues.

158. Jusqu'ici nous n'avons examiné que la hauteur des remous occasionnés par une vanne, au-dessus de laquelle l'eau d'une riviere reverse; mais quand le lit, sans être barré par une tenue, est seulement rétréci par les piles d'un pont, ou par les ailes et les bajoyers d'une écluse ouverte, il s'y forme un remou qu'on peut aisément déterminer d'après nos principes, en négligeant plusieurs quantités, dont les effets sont insensibles sur une grande riviere, et qui se détruisent même en partie. Voici comment on peut énoncer ce probléme.

PROBLÊME.

La profondeur, la pente et la largeur du lit d'une riviere étant données, si on construit sur cette riviere un pont ou un autre ouvrage, qui rétrécisse sa largeur d'une quantité connue, et que la longueur des piles ou des bajoyers soit aussi déterminée, on demande de quelle quantité ce pont fera hausser la surface de l'eau de la riviere dans la partie supérieure, c'est-à-dire quel sera le remou en amont du pont.

SOLUTION.

On remarquera d'abord que toute l'eau de la riviere étant forcée de passer par l'ouverture plus étroite qui reste entre les piles du pont ou les bajoyers, ne pourra le faire qu'avec une vîtesse proportionnée à cette ouverture, et que cette vîtesse ne peut être produite que par une charge d'eau

suffisante. Cette charge est la premiere quantité qui fait partie du remou.

On voit ensuite que le lit de la riviere, au-dessous du pont, restant le même qu'auparavant, l'eau s'y soutiendra à la même hauteur qu'avant l'établissement de ce pont : tout au plus elle pourra s'abaisser un peu à la sortie des bajoyers, avant d'avoir repris sa section ordinaire ; mais cet abaissement peut être négligé. Or, depuis la tête des piles ou des bajoyers jusqu'à leur extrémité, l'eau devant passer avec une plus grande vîtesse que celle qu'elle avait dans le lit naturel, y prendra une plus grande pente ; et cet excès de la pente sur cette longueur fait la seconde partie du remou, dont il faut trouver l'expression.

Soit V la vîtesse de la riviere, avant l'établissement du pont, et K le rapport de la largeur naturelle du lit à la somme des largeurs entre les piles : si la longueur des piles, ou en général du rétrécissement, n'est pas très-grande, KV exprimera sensiblement la vîtesse sous le pont ; et si on suppose pour un moment la contraction nulle, la hauteur nécessaire pour imprimer cette vîtesse sera $\frac{K^2V^2}{2g}$; mais la riviere n'est pas obligée de s'élever de cette quantité, puisqu'elle a déja une vitesse acquise, dont la hauteur due est égale à $\frac{V^2}{2g}$; la hauteur due à l'augmentation de vîtesse sans contraction est donc égale à $\frac{K^2V^2}{2g}-\frac{V^2}{2g}$. Mais si on nomme 2G le coëfficient relatif à la contraction,

qui est plus petit que $2g$, il faudra multiplier la hauteur qu'on vient de trouver par $\frac{2g}{2G}$, pour la soumettre à la contraction, et elle deviendra $\left(\frac{K^2V^2}{2g}-\frac{V^2}{2g}\right)\frac{2g}{2G}=\frac{K^2V^2}{2G}-\frac{V^2}{2G}=\frac{V^2}{2G}(K^2-1)$. Telle est donc la partie du remou nécessaire pour produire l'augmentation de la vîtesse.

Quant à la pente sur la longueur des piles, il est vrai que si cette longueur, ou en général celle du rétrécissement était considérable, il faudrait la chercher par le problême (185), que nous donnerons en parlant des canaux ; mais dans le cas actuel, si p est la pente naturelle du lit, ou plutôt la différence de niveau sur une longueur égale à celle des piles, avant l'établissement du pont, pour la vîtesse V, K^2p exprimera sensiblement la pente nécessaire pour la vîtesse KV, sur la même longueur ; mais la pente était déja égale à p, en supposant que l'eau de la riviere au-dessous du pont conserve sa pente naturelle : ainsi l'augmentation de pente est égale à $K^2p-p=p(K^2-1)$. Donc le remou total, occasionné par ces deux causes est égal à $\left(\frac{V^2}{2G}+p\right)(K^2-1)$; ce qu'il fallait trouver.

159. Appliquons cette formule à un exemple, et supposons une riviere semblable à celle du paragraphe 149, à laquelle nous avons aussi appliqué la théorie des remous.

Nous avons donc $V=23^{po},45$. Supposant une seule arche de 18 pieds de largeur, et celle de la

riviere étant de 40 pieds, K devient égale à 2,222. La longueur des piles étant supposée de 30 pieds, on a $p=0,075$; et si on suppose $2G=660$, la hauteur du remou se borne à 3^{po},47993. On saurait de même la quantité dont l'établissement du pont ferait gonfler les eaux, pendant les crues d'hiver, en employant les données convenables, qui se réduisent ici au changement de la vîtesse, qui se trouverait augmentée par l'accroissement de la hauteur de la section.

Si on examine les deux expériences que nous avons faites sur un pont établi sur notre canal factice (416), on verra que la longueur des piles, non compris l'avant-bec, était d'environ douze pouces, la pente $\frac{1}{1857}$; $p=0^{po},0064$; $K=2,1122$: et si on calcule quelle eût été dans l'une et dans l'autre la vîtesse et la hauteur de section qui auraient produit, avant l'établissement du pont, la même dépense qu'après, comme cela a lieu dans une riviere, on trouvera que, relativement à la cent quatre-vingt-quatorzieme expérience, la vîtesse aurait été de 13^{po},15, avec une hauteur de section de 6^{po},375; et la vîtesse relative à la cent quatre-vingt-quinzieme expérience aurait été de 11^{po},75, avec une hauteur de section de 4^{po},5208. Ainsi les hauteurs de remou auraient dû être dans l'une de 0^{po},9286, et dans l'autre de 0^{po},7459, en supposant $2G=660$.

Mais dans la premiere de ces expériences, la hauteur de l'eau à l'avant-bec des piles, était de 6,666; ainsi la hauteur du remou n'était réelle-

ment que de $0^{po},291$; et quand même on prendrait la section à 9 pieds au-dessus du pont, où sa hauteur était de $6^{po},958$, le remou ne serait encore que de $0^{po},563$; ce qui, comme on le voit, n'est pas suffisant. Dans l'autre expérience, au contraire, la hauteur de l'eau à l'avant-bec était de $5^{po},3333$; ainsi la hauteur du remou était de $0^{po},8125$, qui ne surpasse la hauteur calculée que de $0^{po},0666$, ou d'environ $\frac{3}{4}$ de ligne, qui pouvaient être l'effet du petit remou particulier, qui a toujours lieu immédiatement contre une surface choquée par un courant. Ainsi la cent quatre-vingt-quinzieme expérience, en confirmant nos principes, démontre que la premiere est défectueuse, puisqu'avec une plus grande vîtesse naturelle, tout étant égal d'ailleurs, le remou devait y être plus grand.

Cette erreur néanmoins ne vient point de nos mesures, mais de la maniere dont l'expérience a été faite. En effet, sur 100 pieds de distance depuis la prise d'eau jusqu'au pont, le canal n'avait alors que $0^{po},646$ de pente; et la charge à la tête du canal étant de $6^{po},75$, la surface du réservoir était élevée de $7^{po},396$ au-dessus du radier du pont. D'un autre côté, on voit que si la section naturelle du lit, qui est de $6^{po},375$, se fût exhaussée de $0^{po},9286$, il n'y aurait eu à la surface qu'une pente de $0^{po},0924$ sur 100 pieds, ou de $\frac{1}{13043}$, qui n'aurait pas été suffisante pour produire la dépense que nous avons trouvée. Ainsi l'eau a été obligée d'acquérir de la pente, en approchant du pont, aux

dépens du remou sensible, et de régler ses hauteurs, pour produire la plus grande dépense. Cet inconvénient n'avait pas lieu dans l'autre expérience, parce que la prise d'eau était à proportion plus élevée, relativement à la hauteur de section uniforme; et ce cas n'arriverait jamais dans une riviere qui ne gêne en aucune maniere l'étendue du remou.

160. Si on suppose les obstacles détruits, ou que le lit reprenne son état naturel, on trouve $K = 1$, ce qui rend le remou nul.

Si la longueur des piles, ou en général du rétrécissement, devenait très-petite, la pente sur cette longueur deviendrait comme nulle; mais la contraction augmenterait, c'est-à-dire que $2G$ deviendrait plus petit, ce qui augmenterait l'expression du remou.

Si au contraire le rétrécissement devenait très-long, la pente sur la longueur deviendrait considérable, et le remou en amont plus sensible.

Enfin, si le rétrécissement devenait d'une longueur infinie, le problême, sans changer de nature, devrait s'énoncer ainsi: La largeur, la profondeur et la pente d'une riviere, et sa dépense, par conséquent, étant données; déterminer quelle serait sa profondeur, si on rétrécissait son lit d'une quantité connue, et la chûte qui répondrait à sa nouvelle vîtesse, à l'entrée de son lit rétréci. Ce problême se rapporte naturellement aux canaux, dont nous parlerons bientôt.

CHAPITRE IV.

Suite du même sujet. Réflexions sur la maniere de rendre navigables les rivieres de moyenne grandeur.

161. Ce que nous venons d'établir dans le chapitre précédent, au sujet du remou qu'occasionnent les écluses, est très-propre à fournir des regles sûres pour fixer la distance où elles doivent être placées les unes des autres, relativement à la profondeur d'eau qui reste aux rivieres dans le temps des sécheresses, et à celle qu'on aura jugée nécessaire pour le tirant de l'eau des bateaux, bélandres ou autres vaisseaux de transport en usage dans chaque province.

En effet, si on suppose connues la pente, la largeur et la profondeur d'une riviere, dans le temps des sécheresses, et qu'on ait d'ailleurs fixé la hauteur des portes tournantes, des vannes ou des tenues de poutrelles, dont on veut faire usage pour soutenir ses eaux, dès-lors les emplacements des écluses ne peuvent plus être fixés arbitrairement, si l'on veut conserver dans tous les points une profondeur d'eau suffisante pour la sûreté et la commodité de la navigation. Entrons dans le détail.

Il y a des exemples de rivieres qui ne sont rendues navigables que par de simples tenues de vannes ou de poutrelles, au-dessus desquelles il se forme,

par l'effet du remou, un magasin d'eau, qui, venant à être lâché par l'ouverture de la tenue, remplit le lit inférieur, et éleve ses eaux d'une quantité suffisante pour le tirant de l'eau des bateaux qu'on fait passer à la faveur de ces écluses ; mais quand, après cette accrue momentanée, on referme ces tenues, l'eau baisse dans ce lit inférieur, et ne conserve pas assez d'eau pour y tenir à flot ces mêmes bateaux, qui sont obligés d'aller chercher une profondeur d'eau suffisante, dans le voisinage d'une tenue inférieure, qui forme un nouveau remou. Cette maniere assez grossiere de rendre les rivieres navigables est trop imparfaite, et présente trop d'inconvénients pour être donnée pour modele. Il est probable que l'on ne s'y est pris de cette façon que faute de connaître l'usage et les avantages des sas, dont la découverte n'est pas fort ancienne.

Quand donc une navigation doit être vive et animée, il faut que les bateaux puissent monter et descendre tous les jours et à toute heure, sans jamais courir le risque de manquer d'eau; ce qui ne peut se faire qu'au moyen des sas, ou du moins des bassins formés par deux écluses voisines, qui font l'effet d'un sas. Le seul inconvénient auquel on ne peut parer dans la navigation de ces sortes de rivieres, est celui des accrues de l'hiver, qui mettent quelquefois dans le cas d'interrompre la navigation, à cause de la trop grande rapidité du courant au passage des écluses, quand on n'a pas eu soin de se procurer des décharges d'une largeur suffisante, à côté du passage principal. Nous suppose-

rons donc que, dans la vue de rendre navigable une riviere de moyenne grandeur, on se détermine à placer de distance en distance des sas ou des bassins destinés à soutenir ses eaux, et à racheter la chûte de ces tenues, de maniere que la moindre profondeur du lit, qui se trouve au-dessous d'une tenue, soit égale à un tirant d'eau déterminé.

162. Soit, comme ci-devant (149), une riviere dont la profondeur, dans le temps des sécheresses, soit de 3 pieds, la largeur de 40 pieds, la pente $\frac{1}{4800}$, et qu'on ait par conséquent $V = 23^{po},45$, et $D = 405216$ pouces cubes; on supposera aussi qu'on ait fixé la hauteur de la vanne ou de la porte tournante à 6 pieds, et la largeur du passage à 18 : on demande à quelle distance il faut placer les écluses, pour qu'il n'y ait nulle part moins de 5 pieds de profondeur.

Après avoir cherché la hauteur de la nappe d'eau qui reversera par-dessus les vannes, et avoir déterminé la hauteur du remou (149) et son amplitude (157), on considérera que, puisque la riviere a une profondeur moyenne uniforme de 3 pieds, il ne lui manque que 2 pieds de profondeur de plus, pour qu'il s'y trouve 5 pieds d'eau, comme on le demande : ainsi la question se réduit à déterminer à quelle distance de la tenue le remou se trouvera être de 2 pieds. Or, le remou total étant de $66^{po},182$, sur une amplitude de 660733 pouces, ou de presque 9177 toises, on fera la proportion $66^{po},182 : 24^{po} :: 9177^2$: un quatrieme terme, qui est 30540266, dont la racine quarrée

moins sensiblement, au quarré des amplitudes comptées depuis l'origine du remou A.

164. C'est d'après ces principes, et en usant de quelque méthode d'approximation qui y soit puisée, qu'on réglera avec précision les ouvrages nécessaires pour rendre navigables de petites rivieres, que le peu d'abondance de leurs eaux rend incapables de porter bateau en tout temps; mais il faut s'être assuré auparavant de l'exactitude du régime de ces rivieres; c'est-à-dire qu'elles ont établi leur lit, de maniere à ne plus creuser ni élargir leur section actuelle, ni changer la pente de leurs eaux, sans quoi on tomberait dans de grands inconvénients pour l'avenir.

165. Je dis qu'il faut s'assurer de l'exactitude du régime d'une riviere, avant de fixer les hauteurs des radiers et l'élévation des tenues qu'on y veut faire de distance en distance; et ce n'est pas sans raison: car, comme ces écluses doivent nécessairement être ouvertes de fond, dans le temps des crues, pour procurer à l'eau toute la vîtesse qui peut répondre à la pente et à la capacité de son lit, le régime ne manquera pas de s'y établir à la longue, autant que l'obstacle des écluses le lui permettra; c'est-à-dire que la pente et la figure du lit, dans l'intervalle d'une écluse à l'autre, se conformeront à la mesure qui conviendra le mieux à la dépense et à la ténacité du terrain. Il est vrai que la pente générale paraît être fixée par les radiers qu'on établit à chaque passage d'écluse, et que la largeur de ce passage semble borner, à un certain point, la figure

de la section; mais cela n'empêche pas que, dans l'intervalle des écluses, la pente ne soit indépendante des radiers, et la section très-différente des ouvertures de passage, tellement qu'après un nombre d'années il pourrait arriver que la profondeur de la riviere et le remou des écluses devinssent beaucoup moindres qu'ils n'étaient lors de l'établissement, et que, faute d'avoir prévu ces changements, aussi assurés qu'ils sont lents à s'opérer, la navigation devînt très-incommode, et même tout-à-fait impraticable. On serait alors forcé d'augmenter la hauteur des tenues, et de relever les berges de la riviere, en y faisant des digues, pour la contenir dans son lit; ce qui pourrait causer de grands préjudices aux riverains, et nuire à l'écoulement des eaux du pays, par l'exhaussement du niveau de la riviere en amont de chaque tenue.

Pour prévenir de pareils inconvénients, et rendre le plus durable qu'il est possible l'avantage des ouvrages qu'on n'exécute jamais dans ce genre sans de grandes dépenses, il faut d'avance étudier avec soin quelle est la vîtesse de régime qui convient au terrain dans lequel est creusé le lit de la riviere qu'on projette de rendre navigable. Si cette vîtesse n'est pas beaucoup moindre que celle de la riviere grossie par les crues, le régime sera presque exact, et il n'y aura pas de grands changements à faire à la largeur du lit; mais, si la vîtesse naturelle de la riviere, dans ses hautes eaux, surpasse de beaucoup celle qui convient au régime, il deviendra nécessaire d'élargir le lit, pour faire baisser la sec-

tion, et procurer par-là la diminution de cette vîtesse. Ainsi, connaissant la dépense dans le temps des crues, on la divisera par la vîtesse de régime, ou, si l'on veut, par une vîtesse un peu plus grande, pour une raison que nous dirons tout-à-l'heure; le quotient sera l'aire de la section; prenant ensuite la pente naturelle de la riviere pour la pente constante qu'elle conservera toujours après l'établissement des radiers des écluses, on cherchera le rayon moyen, et ensuite les dimensions du lit. Enfin, les dimensions du lit et la dépense, dans le temps des sécheresses, étant connues, on calculera les hauteurs et les distances des tenues, d'après des largeurs de passage convenables. On voit que ce problême hydraulique, considéré dans toute son étendue, renferme beaucoup de calculs. Nous pourrions nous borner aux regles générales que nous venons d'établir; mais un exemple en rendra l'application plus sensible; et nous entrons d'autant plus volontiers dans ce détail, qu'il nous fournit une occasion de montrer à-la-fois l'usage de plusieurs méthodes, que nous n'avons jusqu'ici qu'indiquées séparément.

Exemple de la maniere de rendre navigable une riviere dont le lit n'a pas encore de stabilité.

166. Supposons une petite riviere peu éloignée de sa source, dont la pente actuelle soit de 2 pouc. pour 100 tois.; dont la profondeur, dans le temps des sécheresses de l'automne, ne soit que de 2 pieds,

mais qui soit sujette à des crues qui fassent monter ses eaux jusqu'à 9 pieds de hauteur, dans un lit dont la largeur par le bas soit de 18 pieds, et les talus dans la proportion de 4 parties de base sur 3 de hauteur; on propose de rendre cette riviere navigable en tout temps, au moyen de plusieurs écluses ou sas placés de distance en distance, et de donner de la stabilité à son lit, dans un terrain dont la vîtesse de régime est de 24 pouces par seconde.

Ce lit ayant les mêmes propriétés qu'un lit rectangulaire, on a $\frac{1}{b}=\frac{1}{3600}$, la largeur, dans le temps des crues, ou $l=30$ pi. $=360$ pouces, la profondeur ou $h=9$ pi. $=108$ pouces, $\frac{lh}{l+2h}$ ou $r=5^{pi},625=61^{po},88$. Ainsi la vîtesse réelle, dans le temps des crues, sera égale à $38^{po},9447$, et la dépense à $151416^{po},936$ par seconde : or, si l'on fait attention que la vîtesse qui convient au régime n'étant que de 24 pouces, la vîtesse réelle est de près de 39, on verra que le lit naturel ne peut avoir de stabilité. Il y a deux moyens de lui en procurer; l'un en diminuant sa pente, et l'autre en augmentant sa largeur aux dépens de sa profondeur. Le premier n'est pas praticable, comme nous l'avons vu ci-devant (135) : il faut donc se contenter du second, qui paraît d'autant plus convenable, qu'il faudrait, pour la seule commodité du passage des bateaux, élargir le lit déja trop étroit, pour en contenir deux qui viendraient à se croiser. Tenons-nous-en là, et cherchons les nouvelles dimensions

qui peuvent convenir au lit, pour lui procurer de la stabilité, sans changer sa pente.

La vîtesse exacte de régime étant de 24 pouces, on peut observer que cette vîtesse n'ayant lieu que dans les crues d'hiver, le lit serait sujet à se combler dans les accrues moindres, et pendant tout le reste de l'année, où la vîtesse serait extrêmement diminuée, à raison de la diminution de la dépense et de la retenue des écluses. Ainsi, il paraît convenable de prendre pour base une vîtesse un peu plus grande, afin que les crues de l'hiver puissent emporter les dépôts formés pendant le lit le reste de l'année, qui tendraient à le relever.

Nous supposerons donc la vîtesse moyenne de régime, augmentée jusqu'à 27 pouces, au lieu de 24, et c'est d'après cette vîtesse qu'il faut chercher les dimensions du lit; l'équation du mouvement uniforme devient donc $V = 27^{po} = \frac{297(\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - L\sqrt{b+1{,}6}} - 0{,}3(\sqrt{r} - 0{,}1)$, dans laquelle le diviseur $\sqrt{b} - L\sqrt{b+1{,}6}$ est égal à 55,884; ainsi on a (62) $\sqrt{r} - 0{,}1 = \frac{27^{po}}{\frac{297}{55{,}884} - 0{,}3} = 5^{po},3843$, et par conséquent $\sqrt{r} = 5{,}4843$; et $r = 30^{po},0775$: ce rayon moyen étant déterminé, et la section, qu'on peut nommer S, étant égale à la dépense $151416^{po},936$, divisée par la vîtesse 27 po., c'est-à-dire à $5608^{po},368$, on trouvera (62) la largeur du lit, par la formule $l = \sqrt{\left(\frac{S}{2r}\right)^2 - 2S} + \frac{S}{2r} = 1802^{po},296$, et par conséquent $h = 31^{po},115$.

167. Les dimensions de la section étant trouvées, on est assuré que ce lit aura de la stabilité, et qu'en même temps que les radiers d'écluse, qu'on y doit construire suivant la pente naturelle, empêcheront qu'il ne se creuse, il ne pourra pas non plus s'élargir ni s'approfondir dans l'intervalle d'une écluse à l'autre. Si la lenteur du courant permet pendant un temps au dépôt de se rasseoir sur le fond et vers les bords, la vîtesse des eaux livrées à toute leur pente pendant les accrues, où toutes les écluses resteront ouvertes, nettoiera en peu de temps le lit; et des éclusiers intelligents régleront la remise des écluses au printemps sur les besoins momentanés du lit. Il faut donc songer à-présent à disposer les écluses nécessaires à la navigation, puisqu'elles sont destinées à soutenir, dans le lit de la riviere, une profondeur d'eau suffisante à l'espece des bateaux qu'on compte y employer. Nous supposerons cette profondeur de 4 pieds; mais il faut savoir, avant tout, à quelle hauteur les basses eaux de l'été se soutiendront dans le nouveau lit. Nous avons supposé qu'il ne restait alors que 2 pieds de profondeur d'eau dans le lit naturel, dont la section par conséquent est réduite dans ce cas à 20 pieds 8 pouces réduits de largeur sur 2 pieds de hauteur, ou à 5952 pouces quarrés. La vîtesse qui répond à ces dimensions et à la pente $\frac{1}{3600}$ est, suivant la formule, de 21^{po},984, et la dépense est de 130848^{po},768 par seconde.

Pour trouver la profondeur de l'eau, qui répondrait, dans le nouveau lit, à cette dépense et à la

pente constante $\frac{1}{3600}$, on se servira de la méthode (124 et 125) d'approximation; faisant attention que D est ici égal à 130848,768 pouces cubes, et que la largeur du fond du lit est égale à 1760^{po},81, on trouvera cette profondeur d'environ 6^{po},3; ainsi, pour obtenir une profondeur de 4 pieds, il faudra un remou de 41^{po},7.

D'après toutes ces données, et après qu'on aura fixé la largeur du passage principal, par lequel se fera le reversement et la hauteur de la tenue, on calculera, par le problême 148, la hauteur du remou en amont de chaque tenue; ensuite (157) l'amplitude entiere de ce remou, et la distance d'une tenue à l'autre, pour que le remou ait 41^{po},7 de hauteur à la tenue supérieure. Nous n'entrons pas là-dessus dans un plus grand détail; ce ne serait qu'une répétition de ce que nous avons dit dans le chapitre précédent: nous nous contenterons d'ajouter ici quelques réflexions générales sur ce dispositif.

168. On aurait pu rendre la riviere navigable pour quelque temps, en laissant subsister l'ancien lit, ou du moins en ne l'élargissant qu'autant que la commodité de la navigation le demande, sans s'embarrasser de la stabilité qui oblige à un élargissement considérable. Par-là, les tenues étant plus éloignées les unes des autres, il en aurait fallu un moindre nombre, et la dépense se serait trouvée doublement diminuée; mais il en est ici comme dans bien d'autres cas, où l'économie mal entendue est une véritable ruine: car, pour peu qu'on

y réfléchisse, on sentira aisément, 1° qu'il n'est pas possible que le lit conserve ses premieres dimensions, puisque la vîtesse de la riviere, dans ses crues, est beaucoup au-dessus de celle de régime; 2° que conséquemment, si on espace les écluses d'après l'état du lit naturel de la riviere, peu d'années s'écouleront sans que la navigation devienne impraticable, par le manque de profondeur d'eau en dessous de chaque écluse, comme il est aisé de s'en convaincre, en calculant la pente à laquelle le lit se réduirait, pour n'avoir que la vîtesse de régime dans sa section naturelle entre deux tenues. 3° Si, pour remédier à ce défaut, on exhausse les tenues, afin d'augmenter le remou, et de soutenir assez de hauteur d'eau sur les radiers inférieurs, on sera forcé aussi de relever les digues, et on noiera le pays, en le privant de la décharge naturelle de ses eaux. 4° Enfin, le mal augmentant tous les ans, et devenant extrême, le cri public, qu'on n'entend jamais que trop tard, et qui souvent suit les malheurs au lieu de les précéder et de les prévoir, obligera à construire des écluses intermédiaires, qui se trouveront forcément trop voisines les unes des autres: par-là on multipliera mal à propos les frais de construction, d'entretien et de péages des écluses, les gages des éclusiers, les engorgements dans les débâcles de l'hiver. Il est donc beaucoup plus sage, pour éviter ces doubles frais, et prévenir les désordres qu'une riviere, abandonnée à une pente trop grande, ne manquerait pas d'occasionner, avant d'avoir elle-même élargi son lit, de dis-

poser tout d'un coup ce lit, et les écluses les plus nécessaires, d'une maniere stable et qui puisse en assurer la durée.

Nous avons au reste choisi pour exemple une riviere où la pente est forcée, et qui se trouve d'ailleurs dans les circonstances les moins favorables à l'établissement d'une navigation. Il est bon d'en user ainsi, pour rendre plus sensibles les résultats, et montrer les cas extrêmes qu'on ne rencontre presque jamais dans la pratique, mais qu'il faut que l'art sache maîtriser au besoin.

169. Je finirai ce chapitre, en proposant un moyen de remédier à l'envasement qui a lieu en avant des portes tournantes des écluses, lorsque les rivieres qu'on veut rendre navigables sont sujettes à charier du limon ou du sable fin, dans le temps de leurs crues : le dépôt de ce limon s'oppose à l'ouverture des portes, et jette dans de grands embarras pour leur manœuvre. De quelque maniere qu'on rende une riviere navigable, soit par des sas et des bassins, soit par de simples tenues d'écluse, il faut nécessairement qu'avant de faire passer les bateaux, on ouvre des vannes ou des vantelles, pour faire passer l'eau dans le lit inférieur ou dans le sas, afin d'élever le niveau de l'eau en aval, et racheter la chûte de l'écluse, d'une maniere qui permette aux bateaux la descente du bassin supérieur dans le bassin inférieur. Or, on peut mettre à profit la dépense d'eau, qui se fait alors avec une grande chûte, pour nettoyer le devant des portes, en la faisant passer par des

aquéducs ou pertuis de 2 pieds de largeur sur 3 de hauteur, pratiqués sur un plan demi-circulaire, dans l'épaisseur des bajoyers, et disposés de maniere que leur entrée soit contiguë au poteau tournant de chaque porte; afin qu'en ouvrant ces pertuis, avant d'ouvrir les portes, le courant se détermine le long de chaque vantau avec violence, et emporte tout ce qui pourrait s'être déposé en avant, et en gêner le mouvement. On a vu par expérience que, faute de cette précaution, l'ouverture des portes tournantes devient très-difficile, leur partie inférieure traîne et laboure dans la vase, leurs assemblages fatiguent considérablement, et le retard qu'éprouve la manœuvre peut causer de grands accidents.

CHAPITRE V.

Des canaux en général. Chûte qui se forme à leur entrée. Moyens de l'empêcher.

170. La théorie des canaux n'est pas, dans la pratique, d'une moindre utilité que celle des rivieres, et quoiqu'elle porte sur la même base, qui est la loi du mouvement uniforme, elle differe cependant de celle-ci par la variété des applications, et des objets auxquels nous faisons servir les canaux. Nous ne parlerons ici que de ceux dans lesquels l'eau est courante, parce qu'ils dépendent directement de l'hydraulique, et présentent plu-

sieurs difficultés qui ne se rencontrent pas dans les canaux où l'eau est de niveau et sans mouvement, et n'a besoin que d'être soutenue par des écluses, et nourrie par quelque ruisseau qui ne soit point sujet à se troubler, et à former des dépôts de limon. Les rivieres sont l'ouvrage de la nature, les canaux sont l'ouvrage de l'homme; l'art ne peut qu'ajouter ou corriger quelque chose dans celles-là; dans ceux-ci il faut tout imaginer, tout exécuter, prévoir les inconvénients, calculer les avantages, et proportionner la dépense, qui est toujours considérable et certaine, au profit et à l'utilité publique, qui sont toujours douteux dans la spéculation, pour la plupart des contribuables. On pourrait donc dire qu'il faut plus d'industrie et de science pour disposer convenablement le projet d'un canal de dérivation, de desséchement ou de navigation, que pour remédier aux désordres d'une riviere, ou pour en tirer quelque service.

171. Un canal differe essentiellement d'une riviere par son origine : celle des rivieres est peu de chose, mais sur une grande longueur de cours elles reçoivent des accroissements insensibles; leur dépense est indépendante de leur pente actuelle : car, au défaut de la pente, leur section augmente. Dans les canaux, au contraire, l'origine fixe principalement leur dépense; ils partent d'un bassin ou d'un réservoir quelconque, dans lequel l'eau étant en repos, est obligée de passer assez rapidement à un mouvement, irrégulier d'abord,

mais bientôt uniforme, et proportionné à l'entrée du canal et à sa pente. Dans ce dernier état, un canal semble différer fort peu d'une riviere; mais pour peu qu'on altere sa pente ou sa section, la dépense varie aussitôt, parce qu'elle est dépendante de la prise d'eau de son entrée.

Pour que l'eau puisse couler dans un tuyau incliné avec une vîtesse uniforme, il est nécessaire qu'il se trouve à la tête de ce tuyau une charge d'eau contenue dans le réservoir, et capable d'imprimer à l'eau la premiere vîtesse, qu'elle doit ensuite conserver uniformément dans toute la longueur du tuyau, à raison de son diametre et de sa pente : sans cette charge, l'eau serait hors d'état de couler dès son entrée avec la vîtesse convenable; au lieu que cette vîtesse, une fois imprimée par la charge, se conserve ensuite sans altération, par l'effet de la force accélératrice, ou de la pente, qui détruit à chaque instant l'effet de la résistance, ou du frottement du tuyau. Il en est de même d'un canal qui tire son origine d'un bassin, d'un lac, ou même d'une riviere, par une ouverture égale à la largeur constante de son lit inférieur. Il est indispensable, dans ce cas, que l'eau forme une chûte, à son départ du lac, laquelle chûte engendre une vîtesse égale à celle que le courant inférieur aura en vertu de sa pente et des dimensions de son lit.

S'il n'y avait aucune contraction d'orifice à l'entrée d'un tuyau ou d'un canal, et qu'on nommât V la vîtesse moyenne et uniforme qui doit s'y établir

inférieurement, la chûte, à son entrée, serait égale à $\frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{724}$; mais s'il y a une contraction d'orifice quelconque, et qu'on nomme G la gravité diminuée qui représente la perte causée par cette contraction, la chûte dont nous parlons sera exprimée par $\frac{V^2}{2G}$. Or, il est évident que cette chûte ne peut se former qu'aux dépends de la profondeur du canal, dont la surface reste abaissée de cette quantité au-dessous du niveau du réservoir d'où il part. Avant d'entrer dans un plus grand détail sur la dépense et la vîtesse des canaux, examinons d'abord quel pourrait être le moyen de conserver au canal une profondeur d'eau égale à la hauteur du réservoir, c'est-à-dire à la hauteur dont l'eau du bassin est élevée au-dessus du fond du canal, à sa prise d'eau.

172. Quand l'eau se met en mouvement pour couler dans le lit d'un canal qui a une pente exprimée par $\frac{1}{b}$, et pour acquérir une vîtesse finale V, si elle n'éprouvait point de résistance dans son lit, c'est-à-dire, si elle pouvait accélérer son mouvement, à la maniere des corps qui glissent sans frottement sur un plan incliné, et qu'elle trouvât à chaque instant des largeurs de lit proportionnelles à ses vîtesses inverses, l'espace qu'elle parcourrait pour acquérir la vîtesse V, serait exprimé par le produit de la chûte due à la vîtesse multipliée par le dénominateur de la pente: car, pour que l'eau tombe de la hauteur $\frac{V^2}{2g}$, en parcourant un

lit dont la pente est $\frac{1}{b}$, il faut qu'on ait $1 : b :: \frac{V^2}{2g}$: un quatrieme terme, qui est égal à $\frac{V^2 b}{2g}$. Dans ce cas, la quantité $2g$ serait toujours égale à 724, parce que la contraction d'orifice serait nulle; et si on imagine une parabole dont le sommet soit à la prise d'eau, dont l'abscisse soit égale à $\frac{V^2 b}{724}$, et dont l'ordonnée correspondante à cette abscisse soit égale à V, il est évident que toutes les autres ordonnées intermédiaires représenteront les vitesses de l'eau correspondantes à chaque abscisse. Ainsi il suffirait de faire, à chacun des points de la longueur $\frac{V^2 b}{724}$, les largeurs du canal proportionnelles à l'inverse des ordonnées. Par ce moyen, l'entrée du canal s'évaserait vers la prise d'eau, et aurait la forme d'une embouchure ou d'une cloche; et la largeur, qu'on peut nommer l, ne commencerait à être uniforme qu'à une distance de la prise d'eau égale à $\frac{V^2 b}{724}$. Pour trouver donc la largeur du canal à un point quelconque, dont la distance, à la prise d'eau, serait nommée E, on ferait la proportion $\sqrt{E} : \sqrt{\frac{V^2 b}{724}} :: l :$ quatrieme terme, qui est

$$\frac{l\sqrt{\frac{V^2 b}{724}}}{\sqrt{E}} = \frac{l}{\sqrt{E}}\sqrt{\frac{V^2 b}{724}}.$$

Il suit de là, qu'en supposant toujours nulle la résistance du lit, un canal évasé, d'après ces principes, n'aurait ni chûte ni contraction à son entrée, et la surface de ses eaux conserverait la même

pente que le fond du lit, auquel elle serait parallele. Tenons-nous-en à ce raisonnement et à cette disposition, sans entrer dans la recherche de l'altération que la résistance du lit devrait occasionner à la courbe qui termine chaque côté de l'évasement que nous proposons. Il est vrai, et nous en convenons, que cette résistance empêchera les vîtesses de croître aussi vîte que nous le supposons, surtout en approchant de l'uniformité; et qu'ainsi la longueur de cette embouchure devrait, à la rigueur, être beaucoup plus grande; mais il est vrai aussi que c'est principalement à l'origine du mouvement, que les largeurs du canal doivent varier davantage, et que le commencement du mouvement differe alors fort peu du mouvement uniformément accéléré. D'ailleurs, en proposant aux praticiens de faire l'évasement plus long que celui que nous venons de déterminer, nous perdrions nos peines, à cause de la dépense du déblai d'une entrée déja fort élargie, et de la sujétion d'une courbure, toujours difficile à tracer, d'après des formules très-compliquées : il ne serait pas même possible, dans la pratique, de faire l'entrée aussi large que l'exigerait la formule précédente, puisqu'elle deviendrait infinie à la prise d'eau ; mais on devra se contenter de lui donner la plus grande largeur possible, suivant les circonstances locales; et il suffit d'avoir montré qu'on peut faire évanouir presque entièrement la chûte et la contraction qui ont lieu à l'entrée d'un canal.

173. Nous croyons donc que la figure évasée,

telle à-peu-près que nous venons de la déterminer, est celle qui convient le mieux à l'embouchure des canaux, et qu'il en doit résulter plusieurs avantages, dont voici les principaux. 1° L'eau ne formant point de chûte à leur entrée, et gardant une pente uniforme à cet endroit, comme au-dessous, où le cours régulier est établi, elle ne perdra rien de sa profondeur ni de sa vîtesse, et la dépense du canal sera la plus grande possible, relativement à ses dimensions. 2° Si cette entrée n'est pas revêtue de quais de maçonnerie, et qu'elle ne soit qu'en terre, l'eau ne fera point d'effort pour ronger les rives, ni pour creuser le lit, comme elle a coutume de faire, quand l'entrée du canal n'a pas plus d'ouverture que le reste du lit. 3° Si le canal doit être fréquenté par des bateaux, l'entrée n'en sera point dangereuse, ni difficile à passer, comme le sont celles qui sont resserrées : car l'eau formant dans celles-ci une chûte assez rapide, et le volume du bateau diminuant encore l'ouverture, il se forme à l'arriere un poids d'eau qui occasionne un mouvement rapide, qui, dans certaines circonstances, peut devenir dangereux.

174. En réfléchissant sur cette disposition de l'entrée des canaux, il est aisé de sentir qu'elle est puisée dans la nature, et que c'est mal à propos qu'on néglige de lui donner cette figure. On peut observer que tout ruisseau qui sort sans gêne d'un étang, toute riviere qui part d'un lac, toute eau enfin qui, au départ d'un bassin, passe du repos

au mouvement, affecte d'élargir elle-même l'entrée de son canal, et de lui donner la forme évasée que nous venons de déterminer, à moins que ses rives ne soient pas de nature à être rongées. On remarque, au contraire, au passage des écluses, des ponts et des entrées des canaux faites en maçonnerie et resserrées, que la contraction jointe à la chûte nécessaire pour engendrer la vitesse, donne lieu, de chaque côté, à un courant rapide, formant chûte, et d'une direction oblique et convergente ; il se forme un vide à la tête de chaque bajoyer, contre la face qui forme le passage, et ce vide est plus considérable si la tête du bajoyer est directe et perpendiculaire à cette face : or, le courant de l'eau qui passe contre cet angle est considérablement plus rapide que celui qui s'établit plus bas le long des rives ; et, si, dans le cours ordinaire de l'eau de ce canal, le régime se trouve exact, comment le pourrait-il être à l'entrée ? L'accélération de la vitesse tend donc à miner peu-à-peu chaque angle de l'entrée du canal, aussi long-temps qu'ils lui résistent, et jusqu'à ce que la chûte et la contraction soient anéanties. Il est donc de la nature de la chose, et conséquemment très-avantageux, de prévenir le vœu de la nature, en se conformant d'avance à la disposition à laquelle elle tend.

175. Ce cas, au reste, n'est pas le seul auquel la théorie précédente doive s'appliquer : nous ferons voir à la fin de cette section que dans tous les cas où il faut qu'un fluide quelconque se dé-

termine vers l'entrée d'un canal, par lequel il doit être conduit, il convient, pour la plus grande dépense de ce fluide, que l'entrée du canal soit évasée. Mais, sans sortir de notre sujet, d'où vient que l'embouchure des rivieres à la mer, et sur-tout dans l'Océan, est si large, en comparaison de la largeur commune de leur lit, à quelque distance de la mer? Ne peut-on pas penser que cela vient du courant contraire du flux, qui remonte dans ces rivieres à chaque marée? Car toutes les douze heures, la mer venant à s'élever de plusieurs pieds au-dessus de son niveau moyen, et cet exhaussement se faisant en six heures de temps, pendant lesquelles l'eau produite par la riviere ne peut pas toujours s'élever aussi vîte que celle de la mer, pour la contre-balancer, il se détermine un courant très-sensible à contre-sens, dont l'Océan est le bassin, et dont l'embouchure de la riviere est l'entrée : or, ce courant nécessite la forme évasée que nous venons de déterminer pour les canaux. On peut donc croire que l'évasement de l'embouchure des rivieres est d'autant plus considérable, que la hauteur des marées est grande, et la pente des rivieres petite ; parce qu'alors le courant qui s'y établit est plus rapide, et que la ténacité des rivages ne peut résister qu'à une vîtesse assez bornée. C'est une observation qu'il ne faut pas négliger dans les travaux qu'on fait quelquefois, pour remédier aux barres qui se forment à l'entrée de quelques rivieres : car si d'un côté il est avantageux de donner plus de chasse aux eaux de la

riviere à marée basse, en bornant son lit à une petite largeur, il est d'ailleurs à craindre qu'à marée haute le courant contraire ne soit plus grand que le premier, sur-tout dans les temps des sécheresses, où la riviere mène peu d'eau à la mer; ce qui peut occasionner des fouilles à l'entrée du canal, et des dépôts en-deçà de son entrée, plus nuisibles peut-être que la barre qu'on voulait prévenir. Il n'y a qu'un examen exact de la dépense de la riviere, de sa pente, de la hauteur des marées, et de la vîtesse dans les deux sens opposés, qui puisse déterminer la nature des travaux qui conviennent le mieux dans chaque cas.

Le gisement de la côte et de l'embouchure, joint à la direction des houles, peut aussi contribuer à donner à l'embouchure d'une riviere la forme évasée qu'elle affecte quelquefois; mais c'est toujours l'effet naturel du mouvement des eaux de la mer, qui se porte vers la côte, soit par le flux, soit par les houles, et qui, trouvant ouvert le canal d'une riviere, qui lui oppose peu de résistance par le mouvement propre de ses eaux, se détermine vers le canal, et en dispose l'entrée de la même maniere que le fait l'eau d'un bassin qui s'écoule vers un canal.

176. Dans la pratique il faut se conformer à cette disposition de la nature, en n'opposant au cours de l'eau ou à son choc que des formes arrondies, des contours adoucis, et jamais des lignes droites, ni des étranglements subits, qui occasionnent nécessairement des chûtes et des contractions

toujours préjudiciables au plus grand débit des eaux, et à la stabilité ou à la durée des ouvrages qu'on fait. Cette regle générale ne doit point se perdre de vue, quand on dispose des quais, des bajoyers, ou des murailles, le long des eaux courantes; lorsqu'on trace le confluent ou le partage de deux bras de riviere, qui se réunissent ou qui se divisent pour embrasser une île; et quand enfin on établit des épys et des tunages, pour donner une forme permanente et durable à la tête ou à la queue d'un ouvrage quelconque, exposé au courant ou aux vagues de l'eau.

CHAPITRE VI.

De la dépense des canaux.

177. Quand l'eau est parvenue à l'uniformité du mouvement dans un canal en pente réglée, on peut considérer tous les filets comme se mouvant avec la même vitesse moyenne, laquelle n'est point produite par la pente, puisque la force accélératrice n'est employée qu'à vaincre la résistance des parois, et à conserver la vitesse acquise : il faut donc que les filets aient acquis leur vitesse par une chûte indépendante de la pente, quand l'eau à passé du repos au mouvement, en se portant du réservoir dans le canal. Il suit de là que si on prolonge jusqu'au réservoir la surface de l'eau du canal, elle doit se trouver, au-dessous de la super-

fond de l'entrée du canal; distance que nous appelons la hauteur du réservoir.

178. On peut néanmoins négliger cette différence, et conclure en général que, dans un canal de largeur et de pente uniformes, la section et la vîtesse moyennes s'établissent de maniere que la hauteur due à cette vîtesse est égale à la différence entre la hauteur du réservoir et celle de la section uniforme.

Ainsi, nommant H la hauteur du réservoir, h celle de la section, et V la vîtesse uniforme, on doit avoir $\frac{V^2}{2G} = H - h$, d'où l'on tire $h = H - \frac{V^2}{2G}$. Lorsque la vîtesse est très-petite, comme de quelques pouces, la quantité $\frac{V^2}{2G}$ devient presque nulle, et on peut indifféremment prendre $h = H$ ou $= H - \frac{V^2}{2G}$, sur-tout si la hauteur du réservoir est au moins de plusieurs pouces.

La seule incertitude qu'il y ait dans cette équation tombe sur la valeur de 2G. S'il n'y avait point de contraction à l'entrée du canal, elle serait égale, comme on sait, à 724; mais elle diminue d'autant plus que la contraction est plus grande. Nous avons déja vu (11) que nos expériences sur le canal factice nous ont donné cette quantité variable entre 530 et 660, ce qui donne une moyenne un peu moindre que 600. Ces variations ne sont pas étonnantes, si l'on considere que l'erreur d'une ligne ou deux sur l'une des hauteurs de section ou de réservoir, en occasionnerait une

considérable sur leur différence, et sur la valeur de 2G, et que d'ailleurs notre canal était trop court pour que le mouvement y fût dans tous les cas parfaitement réglé. Malgré ces irrégularités, il nous a paru que dans le lit trapeze la valeur de 2G augmentait un peu avec la hauteur, et par conséquent la largeur du lit ; ce qui montre une diminution de contraction. Il paraît que cet élément est peu de chose à l'entrée des grands canaux, et on n'a point d'erreur sensible à craindre, en supposant que la contraction y est telle que 2G= 700. En effet, puisque la quantité $\frac{V^2}{2G}$ est déja peu sensible, étant comparée à h dans les grands lits, à plus forte raison ne doit-on pas tenir compte, dans la valeur de 2G, d'une erreur qui ne peut être au plus que de $\frac{1}{20}$.

Sachant donc à quoi s'en tenir sur la chûte et la contraction qui ont lieu à l'entrée d'un canal, on peut résoudre toutes les questions qui ont rapport à sa dépense, par des méthodes d'approximation semblables à celles que nous avons employées précédemment. Pour peu qu'on soit exercé au calcul, ces recherches offriront peu de difficultés, sachant sur-tout que la précision de l'analyse est presque toujours inutile dans la pratique.

PROBLÈME.

179. Connaissant la pente, la largeur et la hauteur de réservoir d'un canal ; déterminer sa dépense, ainsi que la profondeur et la vîtesse que le courant y prendra.

La seule difficulté que présente ce problême est de déterminer la profondeur du courant. Pour y parvenir, nous supposerons qu'on simplifie la formule du mouvement uniforme, en réduisant la valeur de la vîtesse moyenne à $\frac{\sqrt{Ngr}}{\sqrt{B}}$, ce qui n'est pas difficile : car, puisque la pente $\frac{1}{b}$ est connue, on peut faire $\sqrt{b} - L\sqrt{b+1,6} = \sqrt{B}$, et $\sqrt{Ng}$ doit être une quantité moindre que $\sqrt{ng}$, ou 297. Pour trouver sa valeur, il faut 1° supposer une profondeur un peu moindre que la hauteur du réservoir, ou H; et, d'après cette hauteur et la largeur qui est connue, calculer la racine quarrée du rayon moyen, ou $\sqrt{r}$, et la vîtesse ou V par la formule du mouvement uniforme; 2° égaler cette vîtesse supposée à $\frac{\sqrt{Ngr}}{\sqrt{B}}$, ce qui donne $V = \frac{\sqrt{Ngr}}{\sqrt{B}}$, d'où l'on tire $\sqrt{Ng} = \frac{V\sqrt{B}}{\sqrt{r}}$. Cette valeur de $\sqrt{Ng}$ sera suffisamment exacte pour tous les cas où la profondeur différera peu de celle qu'on aura supposée, parce qu'une légere différence en plus ou en moins sur la profondeur ne change pas sensiblement la valeur de $\sqrt{r}$.

D'après cette préparation, c'est-à-dire $\sqrt{Ng}$ étant connue, si on nomme h la profondeur inconnue du canal, et l sa largeur, $\frac{\sqrt{Ng}\sqrt{\frac{lh}{l+2h}}}{\sqrt{B}}$ sera l'expression de la vîtesse moyenne de l'eau dans le canal; et la hauteur de la chûte due à cette vîtesse

sera exprimée par $\frac{Ng}{2GB}\left(\frac{lh}{l+2h}\right)$; quantité qui doit être égale à H—h. Ainsi l'on a $\frac{Ng}{2GB}\left(\frac{lh}{l+2h}\right)=H-h$, d'où l'on déduit $h=-\frac{\left(l\left(\frac{Ng}{2GB}+1\right)-2H\right)}{4}+\frac{\sqrt{8Hl+\left(l\left(\frac{Ng}{2GB}+1\right)-2H\right)^2}}{4}$. On doit remarquer que, d'après cette expression, la quantité $\frac{g}{2G}$ se réduirait a $\frac{1}{2}$, si la contraction était nulle; mais 2G est toujours un peu moindre que 2g ou 724.

180. Pour donner une application de la solution de ce problême, nous choisirons notre quarante-quatrieme expérience sur le canal rectangulaire factice, dans laquelle on avait H=6po,583; l= 17po,25; $\frac{1}{b}=\frac{1}{458}$; et par conséquent $\sqrt{B}$ = 18,339; et où nous supposons 2G=600 pouces, on trouvera $\sqrt{Ng}$ = 275,5, et h deviendra 5po,3424.

D'après cette valeur on conclut la vraie vitesse V=27po,28, et la dépense de 2514 pouces cubes par seconde, au lieu de 2440,4, qu'a donné l'expérience. Cette derniere quantité, divisée par la section mesurée, avait donné une vitesse moyenne de 28po,29, tandis que celle que nous avions calculée par la formule, d'après la profondeur mesurée (108 exp. du tableau § 55), n'était que de 26,69. On voit donc que la premiere, donnée par la solution du problême précédent, tient le milieu entre les deux dernieres, en rectifiant les petites erreurs

de l'expérience; ce qui confirme ce que nous avons dit de la difficulté de régler un canal dont la longueur est bornée. Presque toutes les autres expériences présentent le même résultat.

PROBLÈME.

181. La hauteur du réservoir, la pente du canal et sa dépense étant connues; on demande ses dimensions.

Soient x et y la profondeur et la largeur moyenne du canal, D sa dépense; l'équation $\frac{D}{xy} = \sqrt{2G}\sqrt{H-x}$ donnerait une première valeur de y, en fonction de x, qu'on égalerait à celle qu'on tirerait de l'équation suivante $\frac{D}{xy} = \frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}} \sqrt{\frac{xy}{y+2x}}$, afin d'avoir une seule équation en x et en données. Mais malgré la simplification de la formule du mouvement uniforme, il y a ici de quoi rebuter le calculateur le plus intrépide: il faut donc se contenter d'une méthode d'approximation dont nous allons donner l'exemple dans l'application suivante.

Nous supposerons la hauteur du réservoir de 18 pouces, la pente de $\frac{1}{1000}$, et la dépense qu'on veut se procurer, de 1200 pieds cubes d'eau par minute; il s'agit de trouver les dimensions d'un canal trapeze, dont les talus sont aux $\frac{4}{3}$.

Un premier apperçu suffira pour montrer qu'en prenant $\frac{V^2}{700}$ pour la hauteur due à la vîtesse; cette quantité ne peut être qu'entre 1 et 3 pouces. Supposons-la d'abord de 2 pouces, et, par conséquent,

la profondeur dans le canal, de 16 pouces : d'après cette hypothese, on cherchera, par la méthode du paragraphe 124, quelle doit être la largeur moyenne du canal, en employant l'équation $l = \frac{D}{h(\sqrt{r}-0,1)\left(\frac{297}{\sqrt{B}}-0,3\right)}$, dans laquelle D = 20 pieds cubes, $\sqrt{B} = 28,153$, et $h = 16$ pouces, on trouvera $l = 5^{pi},52$, à-très-peu-près ; la section égale à $7^{pi},36$; et $V = 32^{po},6$, dont la hauteur due est $1^{po},5182$, au lieu de 2 pouces : si on retranche cette nouvelle quantité de 18 pouces, le reste 16,4818 différera très-peu de la véritable profondeur de l'eau dans le canal, de sorte qu'en conservant la même section et la même vîtesse que ci-dessus, on conclurait, avec une précision suffisante dans la pratique, que la largeur moyenne est de $5^{pi},358$, et celle du fond de $3^{pi},527 = 3^{pi}\ 6^{po}\ 4^{li}$.

Ceci est fondé sur ce que la largeur diminuant peu, et en même proportion que la hauteur augmente, le rayon moyen, et par conséquent la vîtesse, ne varient pas sensiblement. Si on voulait tenir compte de cette petite erreur, et approcher encore plus de l'exactitude, il n'y aurait qu'à augmenter la hauteur due à la vîtesse dans le rapport du premier rayon moyen à celui qui est relatif aux nouvelles dimensions ; alors cette hauteur due deviendrait $1^{po},53$, répondante à une vîtesse de $32^{po},72$; la profondeur plus précise du courant serait de $18^{po} - 1^{po},53 = 16^{po},47$; le quotient de la dépense par cette derniere vîtesse donnerait la

section de $7^{pi},335$ quarrés, et en la divisant par la nouvelle profondeur, on aurait $5^{pi},344$ pour la largeur moyenne plus exacte; celle du fond serait de $3^{pi},514 = 3^{pi}\ 6^{pp}\ 2^{li}$.

182. Ce problême peut servir dans la pratique, quand on veut, par exemple, dériver d'une riviere ou d'un lac une certaine quantité d'eau, pour arroser pendant les sécheresses un terrain éloigné et inférieur. On pourrait desirer aussi, en vue de mouvoir une machine, de se procurer un courant qui ait une vîtesse déterminée; et la connaissance de la vîtesse rend ces sortes de questions plus simples : car la vîtesse et la pente étant connues, on déterminera la valeur du rayon moyen; et la profondeur du courant sera connue par la différence entre la hauteur du réservoir et celle qui est due à la vîtesse. Ainsi on trouvera aisément la largeur et la dépense (62).

De même, si la dépense était connue, ainsi que la vîtesse et la hauteur du réservoir, on chercherait les dimensions du lit; et le rayon moyen étant formé, on parviendrait à connaître la pente.

Lorsque la pente d'un canal est telle que la hauteur de la section differe peu de celle du réservoir, la vîtesse, et par conséquent la dépense, ne sont pas considérables. Si, au contraire, la pente était assez grande pour que la hauteur de la section fût très-petite en comparaison de celle du réservoir, la petitesse de la section rendrait la dépense moindre, malgré l'augmentation de la vîtesse. Il y a donc un point intermédiaire, où la dépense serait

la plus grande possible. C'est ce que nous allons déterminer dans le problême suivant.

PROBLÊME.

183. Connaissant la hauteur d'un réservoir constamment plein, au-dessus du fond d'un canal rectangulaire, dont la largeur est donnée; on demande la pente nécessaire, la profondeur et la vîtesse du courant, pour écouler la plus grande quantité d'eau possible.

Soit x la profondeur inconnue; $H-x$ sera la hauteur due à la vîtesse, et $\sqrt{2G}\sqrt{H-x}$ sera la vîtesse même, laquelle, multipliée par la section lx du lit, donnera la dépense. Ainsi $lx\sqrt{2G}\sqrt{H-x}$ doit être un maximum; prenant la différentielle de cette quantité, et l'égalant à zéro, on trouve l'équation $2H=3x$, d'où l'on tire $x=\frac{2}{3}H$. Ainsi la profondeur de l'eau dans le canal étant $\frac{2}{3}H$, la vîtesse moyenne sera $\sqrt{2G}\sqrt{\frac{1}{3}H}$; sa section $\frac{2}{3}lH$; sa dépense devient $\frac{2}{3}\sqrt{2G}\,lH\sqrt{\frac{1}{3}H}$, et son rayon moyen $\frac{\frac{2}{3}lH}{l+\frac{4}{3}H}$. D'après ces données, il est aisé de déterminer la pente.

Si le lit avait la figure d'un trapeze, le problême serait moins simple, et il exigerait la résolution d'une équation du troisieme degré, pour trouver la valeur de x.

184. On a de la peine à concevoir comment la dépense pourrait diminuer, en supposant une pente plus grande que celle que nous venons de

déterminer; cependant il faut de deux choses l'une, ou que le mouvement ne devienne jamais uniforme dans un tel canal, ou que la dépense diminue. En supposant néanmoins qu'elle pût augmenter, il est possible de juger jusqu'à quel point: il n'y a pour cela qu'à prendre le cas extrême, c'est-à-dire supposer le lit du canal vertical; en ce cas son entrée est un véritable reversoir : or nous avons vu que la dépense du reversoir est toujours égale à $\frac{2}{3}\sqrt{2G}\, l\left(h^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{2}h\right)^{\frac{3}{2}}\right)$. Ainsi la plus grande dépense du canal, telle qu'elle est déterminée dans le problème précédent, est à celle d'un reversoir des mêmes dimensions comme $H\sqrt{\frac{1}{3}H} : H^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{2}H\right)^{\frac{3}{2}}$, ou comme $H\sqrt{\frac{1}{3}H} : H\sqrt{H}-\frac{1}{2}H\sqrt{\frac{1}{2}H}$, :: 5773:6465, ou enfin :: 9:10, à-peu-près. Si donc une plus grande pente fait augmenter la dépense, ce ne peut être que de $\frac{1}{9}$.

PROBLÈME.

185. Toutes choses étant données comme dans le problême précédent; on demande que la dépense du canal soit égale à une donnée moindre que la précédente.

En conservant les mêmes dénominations que ci-devant, on a de plus ici la valeur de la dépense, qu'on nommera D; et la vîtesse moyenne sera $\frac{D}{lx}=\sqrt{2G}\sqrt{H-x}$, d'où l'on tire $x^3-Hx^2=-\frac{D^2}{2Gl^2}$, équation du troisieme degré, qui, d'après ce que nous venons de dire sur le maximum de dé-

pense, doit avoir deux racines réelles, répondantes à des pentes différentes; mais on sent bien que celle qui indique la plus grande hauteur de section est la seule qui puisse être de quelque utilité dans la pratique. Quoi qu'il en soit, comme x différera peu de H dans les cas ordinaires, on en obtiendra plus facilement la valeur par une simple approximation que par les méthodes ordinaires. Cette hauteur fera connaître la vîtesse, la section, et la pente.

PROBLÈME.

186. Connaissant l'étendue d'un réservoir qui se vide par un canal rectangulaire, dont la largeur et la pente sont données; on demande la relation entre le temps de l'écoulement et la quantité dont la superficie du réservoir s'abaisse.

Cette question présente plusieurs difficultés, qu'on peut néanmoins éluder, en conservant une précision plus que suffisante, si on observe que, lorsque les hauteurs du réservoir different peu entre elles, on a sensiblement les rapports suivants: 1° les vîtesses dans le canal sont comme les racines quarrées des rayons moyens; 2° les rayons moyens sont comme les profondeurs d'eau dans le canal : ainsi les sommes des profondeurs et des hauteurs dues aux vîtesses, ou bien les hauteurs du réservoir, sont comme les quarrés des vîtesses, ou comme les profondeurs d'eau dans le canal. On cherchera donc, pour une hauteur de réservoir moyenne, entre deux extrêmes données, les rap-

ports de cette hauteur avec la profondeur de l'eau et avec le rayon moyen.

Soient $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ ces rapports; *a* la quantité dont la superficie du réservoir s'abaisse pendant le temps *t*; et S l'étendue de cette superficie : après l'abaissement quelconque x, $H - x$ sera la hauteur du réservoir; $\frac{H-x}{p}$ sera la profondeur de l'eau dans le canal; $\frac{H-x}{q}$ le rayon moyen; et $\frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}}\sqrt{\frac{H-x}{q}}$ la vîtesse avec la formule simplifiée : à ce point, la dépense, pendant l'unité de temps, serait $\frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}}\sqrt{\frac{H-x}{q}}\,l\frac{(H-x)}{p} = \frac{l\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}p\sqrt{q}}(H-x)^{\frac{3}{2}}$; et pendant un temps infiniment petit, $\frac{l\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}p\sqrt{q}}\,dt\,(H-x)^{\frac{3}{2}}$; dans le même instant la surface du réservoir descendrait d'une quantité dx. On a donc l'équation des deux dépenses $\frac{l\sqrt{Ng}\,dt}{\sqrt{B}p\sqrt{q}}(H-x)^{\frac{3}{2}} = Sdx$, ou $dt = \frac{\sqrt{B}.Sp\sqrt{q}}{l\sqrt{Ng}}\cdot\frac{dx}{(H-x)^{\frac{3}{2}}}$, qui, étant intégrée, donne $t = \frac{2\sqrt{B}Sp\sqrt{q}}{l\sqrt{Ng}\sqrt{H-x}} + c$. On voit que lorsque $x=0$, $t=0$, et que la constante devient $-\frac{2\sqrt{B}Sp\sqrt{q}}{l\sqrt{NgH}}$: ainsi la valeur complete du temps, réduit en minutes, est $t = \frac{2\sqrt{B}Sp\sqrt{q}}{60l\sqrt{Ng}}\left(\frac{1}{\sqrt{H-a}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right)$.

187. Appliquons ce calcul à l'abaissement du réservoir qui fournissait les eaux à notre canal factice, sur une hauteur de réservoir de 6 pouces 7 lignes, tandis que la surface du réservoir était d'en-

viron 4900 toises quarrées, la pente du canal $\frac{1}{450}$, sa largeur $17^{po}\frac{1}{4}$; ce sont les données de l'expérience quarante-quatrieme, d'après lesquelles le coëfficient réellement constant $\frac{2\sqrt{Bs}}{60\,l}$ est égal à $900168^{po},5$. Pour pouvoir considérer comme constante la quantité $\frac{p\sqrt{q}}{\sqrt{Ng}}$, il faut prendre une valeur de a un peu petite, relativement à H. Supposons donc que la superficie du réservoir baisse d'un pouce, sa hauteur moyenne sera égale à 6 pouces une ligne; les valeurs de $\sqrt{Ng}$ de p et de q, qui sont 275,02, 1,23845, et 1,94378, donnent 159,292 pour la valeur de la quantité $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}}$, qui servira de diviseur à la premiere; $\frac{1}{\sqrt{H-a}}-\frac{1}{\sqrt{H}}$ vaudra 0,033566, et on aura $t = 189',77$.

Si on fait ensuite $H = 5^{po}\,7^{li}$, et qu'on cherche de nouveau le temps d'un nouvel abaissement d'un pouce, on aura $\sqrt{Ng} = 273,96$; $p = 1,253$; $q = 1,8435$; et $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}} = 161,086$. Ainsi $t = 245',05$. Pour un troisieme abaissement depuis 4 pouces 7 lignes jusqu'à 3 pouces 7 lignes, on aura $\sqrt{Ng} = 272,46$; $p = 1,2679$; $q = 1,7414$; et $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}} = 162,838$, d'où l'on tire $t = 338',38$. Ainsi la somme des temps, pour une descente de 3 pouces, sera 773',2 : on voit aussi que les valeurs de $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}}$ varient si peu, qu'on a eu raison de les supposer constantes pour une descente d'un pouce. Enfin,

en calculant directement le temps total de la descente de 3 pouces avec la valeur constante de $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}} = 161{,}086$, qui répond à une hauteur de réservoir moyenne entre 6 pouces 7 lignes et 3 pouces 7 lignes, on a $t = 774',1$, qui differe bien peu du précédent.

188. Ce problême peut servir à connaître combien de temps il faudra pour écouler un lac, ou une inondation qu'on veut saigner par le moyen d'un canal, en faisant cependant une observation très-importante : c'est que dans un bassin naturel, dont le fond va toujours en se rétrécissant, la surface S diminue à mesure que les hauteurs du réservoir s'abaissent ; de sorte que les temps, pour des abaissements égaux, peuvent être à-peu-près égaux eux-mêmes, ainsi qu'on l'a observé dans le temps de l'écoulement des marais de Condé, lorsqu'ils se desséchent au printemps. Il est vrai que cette égalité n'a plus lieu quand le desséchement tire à sa fin, et qu'il ne reste que quelques pouces de hauteur d'eau, parce que le fond de cuve est plus applati, et que la pointe des herbes dont les prairies se couvrent alors, s'oppose à l'écoulement, en retenant les eaux. Passons à l'examen des dépenses des canaux dont l'entrée est garnie d'une vanne.

CHAPITRE VII.

Des canaux garnis d'un vannage à leur tête.

189. Nous n'avons considéré jusqu'à-présent le mouvement de l'eau dans les canaux, qu'en supposant qu'elle y entre librement et sans autre obstacle que celui de la contraction; mais il arrive souvent que cette entrée est garnie d'une vanne, qui, n'étant élevée que d'une certaine hauteur, beaucoup moindre que celle du réservoir, forme un orifice par lequel l'eau passe du réservoir dans le canal. Cette disposition change le cours de l'eau, et demande d'être considérée séparément.

Si l'eau, au sortir de l'orifice que forme un vannage, coule dans un canal dont la pente et les dimensions soient telles que la hauteur de la section soit à-peu-près égale à la hauteur dont la vanne est levée, il paraît évident que l'eau du canal ne peut point réagir contre celle qui sort de l'orifice, et que la dépense sera la même que si le canal n'existait pas. Cette vérité est en effet confirmée par les expériences de M. l'abbé Bossut : dans ce cas, la dépense, commune à l'orifice et au canal, est due à la charge entiere relative à chaque point de l'orifice; et c'est ainsi que dans les tuyaux de conduite fixés à la pente qui convient au mouvement uniforme, avec une charge suffisante à leur tête, nous avons toujours compté cette charge qui imprime

la vîtesse, depuis la superficie du réservoir jusqu'au centre de l'orifice supérieur.

Dans un canal ouvert, si la charge ou la hauteur du réservoir reste la même, ainsi que l'élévation de la vanne, on peut augmenter la pente, sans que la dépense augmente; mais si la pente au contraire vient à diminuer, la dépense ne peut rester constante: car l'eau ne peut plus couler dans le canal sans prendre une section plus élevée que celle de l'orifice; ce qui la fait refluer vers la vanne, contre laquelle elle commence à s'appuyer. Or, cette portion d'eau, plus élevée que le sommet de l'orifice, étant considérée comme stagnante, doit contrarier et diminuer l'effet de la charge entiere.

Il paraît impossible de déterminer avec précision à quelle pente l'eau du canal commence à contre-balancer celle qui passe à l'orifice : car la contraction qui a lieu au passage de l'orifice empêche l'eau de prendre, dès l'origine du canal, toute la hauteur qu'elle doit prendre ensuite pour couler uniformément. Il est vrai que quand elle est parvenue à cette hauteur uniforme, il se fait un remou en arriere, vers l'origine du canal; mais tant que ce remou ne remonte pas jusqu'à la vanne, la dépense est la même que si le canal n'existait pas. Ainsi la hauteur uniforme de l'eau peut excéder un peu l'élévation de la vanne, sans nuire à la dépense, laquelle ne commence à diminuer que quand le remou couvre la veine contractée : alors cette diminution devient d'autant plus sensible, qu'une plus grande hauteur d'eau s'appuie contre

la vanne, à son aval; mais cette même hauteur est toujours moindre que l'élévation de la section uniforme, parce que l'eau qui la forme est entraînée par le mouvement rapide de celle qui passe sous la vanne. Ainsi, dans les canaux qui ont une grande pente, il y a une différence considérable entre la hauteur de l'eau en dessous, c'est-à-dire à l'aval de la vanne, et celle du courant uniforme; mais cette différence peut être négligée dans les canaux ordinaires, où la pente est petite. On peut alors considérer la vîtesse à l'orifice comme étant due à la différence entre la hauteur entiere du réservoir, sur le fond de l'entrée du canal, et la profondeur uniforme de l'eau dans le canal, ainsi que nous l'avons déja dit ci-devant (177 et 178).

190. Soit donc H la hauteur du réservoir, h et l la profondeur et la largeur moyenne du canal, E et L l'élévation et la largeur de la vanne rectangulaire; $EL\sqrt{H-h}\sqrt{2G}$ sera la dépense de l'orifice, et $lh\frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}}\sqrt{\frac{lh}{l+2h}}$ sera celle du canal. Ces deux dépenses devant être égales, on aura l'équation $EL\sqrt{H-h}\sqrt{2G}=lh\frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}}\sqrt{\frac{lh}{l+2h}}$, qui est la clef de tous les problêmes qu'on peut proposer à cet égard. Il est vrai qu'il reste encore quelque incertitude sur la valeur de 2G, qui est relative à la contraction; néanmoins si les vannes ne laissent qu'un ou deux pieds quarrés d'ouverture, et n'ont que quelques pouces d'épaisseur, on doit, comme dans un orifice mince, faire 2G=278 (7); mais

si le canal n'est pas plus large que la vanne, et que l'écluse soit jointive au réservoir, la contraction sera la même qu'aux tuyaux, et on aura $2G=478$. Cette quantité augmenterait encore pour de plus grandes dimensions; et sur-tout si l'écluse était précédée d'un avant-canal, ou d'ailes évasées.

D'après ces principes, nous donnerons quelques applications à la pratique par les problêmes suivants.

PROBLÊME.

191. Soit un canal de dérivation, qui tire de l'eau d'un bassin entretenu constamment plein, au moyen d'une écluse d'entrée garnie d'une vanne, sous laquelle passe l'eau; si on suppose connues la largeur de la vanne, et la hauteur dont elle est levée, la hauteur du réservoir, la largeur et la pente du canal, on demande quelle sera la profondeur de l'eau dans le canal, sa vîtesse et la dépense.

On peut employer ici la méthode indiquée pour le problême précédent (179), en faisant une premiere supposition pour trouver la valeur du rayon moyen : alors l'équation $EL\sqrt{H-h}\sqrt{2G}=lh\frac{\sqrt{Ngr}}{\sqrt{B}}$ donnera $h=-\frac{GE^2L^2B}{l^2Ngr}+\sqrt{\frac{GE^2L^2BH}{l^2Ngr}+\left(\frac{GE^2L^2B}{l^2Ngr}\right)^2}$; et si cette valeur differe sensiblement de celle qu'on aura supposée pour former le rayon moyen r, une seconde opération, en employant h, pour former un nouveau rayon moyen, rectifiera la premiere.

PROBLÈME.

192. Les dimensions et la pente du lit, la vîtesse et la dépense ordinaires d'une riviere étant données, on veut, par le moyen d'un vannage, soutenir la riviere à une hauteur connue en amont de l'écluse; on demande quelle doit être l'aire de l'orifice en dessous de la vanne.

On doit remarquer que l'eau de la riviere ou du réservoir, au-dessus de la vanne, n'étant pas stagnante, il faut tenir compte de la hauteur due à la vîtesse moyenne en amont, comme d'une augmentation réelle à la hauteur du réservoir. Ainsi H est composé de la hauteur qu'on veut se procurer, et de celle qui est due à la vîtesse en amont; h, ou la profondeur de l'eau au-dessous de l'écluse, n'est autre chose que la profondeur ordinaire de la riviere. D'après cela, on a E L $=$ $\frac{lh\sqrt{Ngr}}{\sqrt{2GB(H-h)}} = \frac{D}{\sqrt{2G(H-h)}}$.

Si l'aire de l'orifice était connue, et qu'on demandât la hauteur à laquelle l'eau s'éleverait en amont, on aurait $H-h = \frac{D^2}{2GE^2L^2}$ pour l'expression de la quantité dont l'eau s'éleverait au-dessus de son niveau ordinaire; mais il faudrait retrancher de cette quantité la hauteur due à la vîtesse acquise au-dessus de l'écluse, de sorte que si la vanne avait la même largeur que la riviere, et qu'on l'élevât jusqu'à la surface ordinaire de l'eau, $\frac{D^2}{2GE^2L^2}$,

ment complet n'ayant lieu que vers les mois de juillet ou d'août, il ne peut pas procurer beaucoup d'avantages; et les exhalaisons mal-saines qui s'élevent alors d'un sol couvert de fange, causent une putréfaction très-dangereuse : un desséchement permanent et constant rendrait à l'agriculture un fonds nouveau, et préviendrait l'infection de l'air. Pour se procurer ces deux avantages, on propose de creuser un autre canal AC ou AD et même AE, et on demande quel est celui des trois qui sera le plus avantageux, quelle longueur il faudra lui donner, et quelles doivent être ses dimensions, pour que le desséchement soit complet dans tous les cas.

199. Pour répondre à la premiere question, j'observe que si on suppose la longueur du canal AC égale à la portion BC du lit de la riviere, et que le canal AD soit aussi d'une longueur égale à la portion BD, qui lui répond, il est évident que ces deux canaux, ayant l'un et l'autre la même pente, et étant supposés de sections égales, feront la même dépense d'eau, tant que le niveau du bassin restera le même; mais quand ce niveau viendra à baisser, sans que la riviere baisse dans la même proportion, il est encore évident que le canal le plus long opérera le desséchement le plus prompt : car le premier canal AC pourrait ne plus avoir de pente, tandis que celle du canal AD ne serait diminuée que de moitié; ainsi l'effet du premier serait nul, mais non pas celui du second. On peut faire le même raisonnement pour com-

parer l'effet du canal AD avec celui du canal AE. Donc il est certain que plus il y aura de différence de niveau entre l'eau du bassin et celle de la riviere, prise au point où aboutit le canal, plus il restera de pente au canal, déduction faite de la hauteur dont l'eau pourra baisser dans le bassin, ou de celle dont elle pourra s'élever dans la riviere par les crues. Ainsi, une crue qui ferait hausser le niveau de la riviere d'une quantité donnée, pourrait anéantir la pente du canal AC, ou même AD, et faire refouler l'eau dans le bassin A, tandis que le canal AE conserverait encore assez de pente pour continuer de couler. Il faut donc conclure en premier lieu que le canal AE est préférable aux deux autres.

200. Mais on demande, en second lieu, quelle est la longueur positive qu'il faut donner au canal de desséchement, pour qu'il ne reste jamais d'eau dans le bassin A. On peut dire en général que cette longueur doit être au moins telle, qu'elle aboutisse à un point de la riviere où la surface des plus hautes eaux soit inférieure au fond du bassin, afin qu'en tout temps, même dans les crues d'hiver, l'eau du bassin puisse couler sans interruption, et que celle de la riviere ne puisse pas refouler, ni arrêter cet écoulement : au reste, on sent déja que l'infériorité de la surface de l'eau de la riviere, au point de jonction du canal, sous le fond du bassin, et par conséquent la longueur absolue du canal, dépendent des dimensions qu'on lui donnera. Ces dimensions doivent être réglées sur la pente

SOLUTION.

La pente de la riviere étant de 2 pouces pour 100 toises, ou de $\frac{1}{3600}$, et le canal étant supposé sensiblement parallele au lit de la riviere, ce n'est qu'au-delà de 1800 toises que la surface de la riviere sera abaissée de plus de 3 pieds, et qu'elle se trouvera plus basse que le fond du marais. Ainsi, le canal ne peut avoir moins de 1800 toises de longueur; et, si on se bornait à lui donner quelques toises de plus, sa pente serait si petite qu'il lui faudrait une largeur immense pour écouler toute l'eau qu'il est supposé devoir débiter. D'un autre côté, on voit que si la pente du canal devenait presque aussi forte que celle de la riviere, il ne pourrait la rencontrer qu'à une très-grande distance; et cependant si on calcule la largeur qu'il devrait avoir avec cette pente, on trouvera qu'elle devrait être de près de 13 pieds. Plus on s'éloignera de ces deux extrêmes, plus on diminuera les frais de l'excavation, qu'il est très-important de considérer dans ces sortes de travaux. Il faut donc trouver à quelle longueur de canal le déblai est un *minimum*.

Soient x la largeur du canal, y sa longueur depuis la prise d'eau du bassin jusqu'à son confluent dans la riviere, h la profondeur de l'eau dans le canal au-dessus du fond du marais, q la hauteur dont ce fond est plus bas que la surface de la riviere vis-à-vis le bassin, D la dépense du canal par seconde, et $\frac{1}{a}$ la pente de la riviere; il

faut que hxy soit un *minimum*, ou qu'on ait $xdy+ydx=0$.

La formule ordinaire des vîtesses $V = \frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0{,}1)}{\sqrt{b}-\mathrm{L}\sqrt{b+1{,}6}} - 0{,}3(\sqrt{r}-0{,}1)$, d'après laquelle on peut trouver les valeurs de y et de dy, est trop compliquée sous cette forme, à cause du logarithme; mais en faisant un apperçu des valeurs qu'on cherche, on verra qu'on peut se servir de la formule simplifiée $V=\frac{\sqrt{Ng}\sqrt{r}}{\sqrt{B}}$, en faisant $\sqrt{Ng}= 275$ environ, valeur qui sera suffisamment exacte pour tous les cas qui en différeront peu, puisqu'alors les vîtesses sont sensiblement proportionnelles aux racines quarrées des pentes.

Pour faire entrer ces données dans l'équation, on remarquera que $V=\frac{D}{hx}$; $r=\frac{hx}{x+2h}$. Quant à B, on observera que le canal étant supposé avoir la même longueur que la riviere, depuis la prise d'eau jusqu'au confluent, $\frac{y}{a}$ exprime la pente totale de la riviere, sur la longueur du canal, $\frac{y}{a}-q$ représente celle du canal : or, cette quantité étant divisée par y, donne la valeur de $\frac{1}{B}=\frac{\frac{y}{a}-q}{y}$.

Ainsi, l'équation, pour le canal, devient $\frac{D}{hx}=\sqrt{Ng}\sqrt{\frac{hx}{x+2h}}\sqrt{\frac{\frac{y}{a}-q}{y}}$; d'où l'on tire $y=\frac{Ngqh^3x^3}{\frac{Ngh^3x^3}{a}-D^2(x+2h)}$; et $dy=\frac{3Ngqh^3x^2dx}{\frac{Ngh^3x^3}{a}-D^2(x+2h)}$ —

$\frac{Ngqh^3x^3dx\left(\frac{3Ngh^3x^2}{a}-D^2\right)}{\left(\frac{Ngh^3x^3}{a}-D^2(x+2h)\right)^2}$; substituant ces deux valeurs dans l'équation $xdy+ydx=0$, et réduisant, on a $\frac{Ngh^3x^3}{aD^2}-3x=8h$.

Si on résout cette équation, en faisant $Ng=(275)^2$ ou 75625 pouces, $h=72$ pouces, $\frac{1}{a}=\frac{1}{3600}$, et $D=518400$ pouces cubes, on aura $x=392$ pouces, ou 32 pieds 8 pouces; et $\frac{D}{hx}$, ou la vîtesse, sera de $18^{po},36$; mettant ensuite ces valeurs dans la formule rigoureuse des vîtesses, on trouvera que la pente du canal, dans ce cas, est égale à $\frac{1}{11664}$, ou de $0,^{po},6173$ par 100 toises.

Soit l la longueur du canal ou de la riviere, exprimée en toises; celle-ci ayant 2 pouces de pente par 100 toises, sa pente totale sur la longueur l sera $\frac{2l}{100}$; de même la pente totale du canal sera $\frac{0,6173l}{100}$. La différence de ces deux quantités doit être égale à 36 pouces, qui est la différence de niveau entre la riviere et la prise d'eau du canal. On a donc $\left(\frac{2^{po}-0^{po},6173}{100}\right)l=$ 36 pouces; d'où l'on tire $l=2604$ toises; et cette longueur, multipliée par la section du canal, donne, pour le massif du déblai, 14177 toises cubes.

203. Pour se faire une idée de l'importance et de l'exactitude de cette méthode, on peut supposer à volonté deux autres largeurs du canal, l'une

plus grande, et l'autre moindre que celle qu'on vient de déterminer, comme, par exemple, 42 et 21 pieds. Si on calcule les pentes, et par conséquent les longueurs du canal, qui seront nécessaires alors pour faire la dépense demandée, on obtiendra les résultats exprimés dans le tableau suivant, qui montre plus clairement l'avantage de la solution donnée par l'équation du *minimum*.

Largeurs du canal.		Vitesses moyennes par secondes.	Pentes du canal.	Pentes sur 100 toises.	Longueurs du canal.	Déblais.
pi.	po.	po.		po.		t. c.
42	0	14,285	$\frac{1}{18988}$	0,379	2221	15547
32	8	18,36	$\frac{1}{11664}$	0,6713	2604	14177
21	0	28,57	$\frac{1}{4761}$	1,5123	7381	25833

204. Nous avons résolu le problême avec les conditions qui le rendent le plus simple; on aurait pu le compliquer, en supposant la prise d'eau éloignée de la riviere d'une quantité connue K, et assez considérable pour qu'il ne soit pas permis de la négliger. Soient m et n la pente de la riviere et du canal par 100 toises, et q la différence de niveau de l'une à l'autre, au lieu d'avoir, comme tout-à-l'heure, $\frac{(m-n)}{100}l=q$, on aura $\frac{m\sqrt{l^2-K^2}-nl}{100}=q$, d'où l'on tire $l=\frac{100qn+m\sqrt{10000q^2+K^2(m^2-n^2)}}{m^2+n^2}$, équation qui se réduit, comme dans le premier cas, à $l=\frac{100q}{m-n}$, lorsque K est assez petit pour être négligé.

Si la riviere faisait des sinuosités peu irrégulieres, elles ne seraient pas un obstacle à l'exac-

titude de l'opération : on pourrait alors imaginer une ligne inclinée de maniere qu'elle toucherait la surface de la riviere au milieu de toutes ses sinuosités; et c'est la direction et la pente de cette ligne qu'on prendrait pour celle de la riviere. Mais si les sinuosités étaient très-irrégulieres, et que, d'un autre côté, le terrain dans lequel le canal doit être creusé ne suivît pas, à-peu-près, la pente uniforme qui lui convient; dans ce cas l'exactitude rigoureuse du calcul doit être abandonnée, et le tact seul de l'hydraulicien doit le guider. Il suffit d'avoir indiqué la marche générale, dont il ne faut s'écarter que le moins qu'il est possible.

205. Dans tout ce qui précede nous avons supposé qu'on n'était gêné par aucun obstacle qui empêche de prolonger le canal de desséchement aussi loin qu'on le jugera nécessaire; mais, s'il en était autrement, et qu'on rencontrât en chemin une riviere ou un canal comme FG, il faudrait supputer avec soin ce que pourrait coûter un aquéduc passant sous cette riviere ou ce canal, et ajouter cette dépense à celle du canal AE : si cette somme n'excédait pas celle que coûterait le canal AD, on se déterminerait pour le premier, qui aurait l'avantage d'être sujet à moins d'entretien, à cause de la plus grande vîtesse de son courant : on pourrait, au contraire, se déterminer pour le moins long, si la vîtesse de régime y était mieux observée. Enfin, il pourrait se présenter des cas où la riviere qui doit recevoir les eaux du bassin ayant fort peu de pente, et le bassin beaucoup de

profondeur, il ne serait guere possible d'opérer le desséchement complet, à moins de donner au canal une longueur excessive, et de surmonter beaucoup de difficultés, qui pourraient être de nature à entraîner trop de dépenses. Des raisons particulieres peuvent d'ailleurs s'opposer à la prolongation d'un canal au-delà d'un certain terme. Ainsi il peut devenir impossible de tenir à sec pendant l'hiver le bassin et les marais dont on veut procurer le desséchement. Si cela était, il faudrait bien se contenter de donner au canal la plus grande longueur que la nature du local permettrait, et s'attendre à voir tous les hivers les marais couverts d'une certaine hauteur d'eau.

Ce ne serait que vers les mois de mars, avril ou mai, que le niveau de la riviere devenant plus bas que le fond du bassin, les eaux pourraient s'écouler tout-à-fait. Si on desirait de savoir, avant d'entreprendre un canal semblable, combien il resterait d'eau dans le fond de cuve, lorsque les eaux de la riviere seraient à leur plus grande hauteur, il faudrait, par un nivellement bien exact, s'assurer du rapport qu'il y aurait entre l'eau des plus grandes crues de cette riviere, prise au point du confluent du canal, et le sol le plus bas des terrains inondés du bassin, et ajouter à cette différence la pente nécessaire, pour que le canal, dont la longueur et la section seraient supposées connues, écoulât en un jour autant d'eau que le bassin en recevrait du ciel ou des ruisseaux qui s'y rassemblent. Par ce moyen, on aurait une connaissance

largeur uniforme, il se formera, de droite et de gauche, un tournant d'eau, ou un tourbillon, dans lequel le courant s'égare, et revient sur lui-même; la dépense diminue par l'effet de la contraction, et l'eau vraiment courante forme une courbe qui s'éloigne de chaque bajoyer, en se séparant de celle qui ne fait que tournoyer. La perte de vîtesse, ou celle du débit que l'irrégularité de ces mouvements occasionne, est ce que nous avons exprimé par l'effet de la contraction; et la vîtesse moyenne de l'orifice diminue, toutes choses égales d'ailleurs, dans le rapport de $\sqrt{724}$ à $\sqrt{600}$, plus ou moins, selon la disposition qu'on donne à l'entrée du rétrécissement. Ainsi il y a une perte d'environ $\frac{1}{10}$ sur la dépense. Voyons quels peuvent être les moyens de remédier à cet inconvénient, en faisant prendre au courant l'accélération la plus avantageuse.

Fig. 22. 212. Soit donc une écluse A, destinée à barrer une riviere B par une tenue de poutrelles, ou par une porte tournante, telle qu'en l'ouvrant, au besoin, on y puisse faire passer des bateaux, ou rendre à l'eau un libre cours, pour évacuer promptement les eaux du pays. Comme ce n'est que par nécessité qu'on se détermine à faire l'écluse plus étroite que le lit de la riviere, il est clair qu'on doit chercher à la rendre capable de la plus grande dépense possible, quand elle est ouverte, et que, dans cette vue, il faut diminuer la contraction, et faire essuyer à l'eau le moins de choc possible contre la tête des bajoyers; cependant on se con-

tente assez communément de faire à l'amont et à l'aval de chaque bajoyer un pan coupé, qui remédie bien peu à la contraction; on laisse la tête des bajoyers en E et G perpendiculaire à la direction du courant, et le passage de l'écluse est d'une largeur uniforme sur la longueur de ces bajoyers. Cette disposition est défectueuse, comme on peut s'en convaincre, en considérant que la vîtesse moyenne du lit B étant uniforme, ou du moins censée l'être jusqu'en EG, et l'eau ayant à ce point une hauteur de remou propre à faire accélérer la vîtesse dans le rapport de IH à GE, à peu près, on ne peut obtenir le *minimum* de résistance de la part de l'écluse, et par conséquent de contraction de la part de l'eau, qu'en faisant en sorte que le courant conserve une pente uniforme et réglée sur la longueur DH, et que les largeurs du passage soient proportionnelles à l'inverse des vîtesses que l'eau acquerra en tombant de la hauteur du remou qu'elle a formé en avant. Or, cela indique que les bajoyers doivent former une courbe qui se rapporte à la nature de la parabole.

213. Pour déterminer cette courbe on peut faire une supposition qui, quoique inexacte à la rigueur, ne tire point cependant à conséquence, dans tous les cas où la longueur du rétrécissement n'est pas très-grande, comparée à la section du courant; c'est que l'eau coule sans frottement dans son lit, et qu'elle y peut accélérer son mouvement avec uniformité. Or, cela supposé, on

sait que dans le mouvement uniformément accéléré, les vîtesses sont proportionnelles aux racines quarrées des espaces parcourus, ou que si les espaces sont représentés par les abscisses d'une parabole, les vîtesses le seront par les ordonnées correspondantes, d'où il suit que, si dans le cours d'une eau qui accélere son mouvement, on connaît deux vîtesses qui répondent aux deux extrémités d'une longueur donnée, il sera facile de trouver à quelle distance serait l'origine du mouvement, ou le sommet de la parabole : car, nommant K le rapport de la plus grande vîtesse à la moindre, m l'espace qui les sépare, et x l'abscisse qui répond à la plus petite vîtesse des deux, on aura $1 : K^2 :: x : x+m$, ou bien $K^2-1 : 1 :: x+m-x : x$; d'où l'on tire $x=\frac{m}{K^2-1}$.

Considérons à présent l'écluse qu'on propose d'établir sur la riviere B. On voit que l'eau qui coulera avec la vîtesse u dans le lit ordinaire au-dessus de l'écluse, sera obligée d'accélérer son mouvement, en parcourant la longueur des bajoyers, et de passer en IH avec une plus grande vîtesse V : or, ces deux vîtesses sont sensiblement l'une à l'autre :: IH : GE, en raison inverse des largeurs. Ainsi on a $\frac{GE}{IH}=K$; et si on nomme m la longueur des bajoyers DH, on aura $\frac{m}{K^2-1}=x$, ou la distance de la tête des bajoyers au sommet de la parabole, qui représente les vîtesses correspondantes à chaque point de la longueur des ba-

joyers; d'où il suit que, pour avoir la largeur du passage entre les bajoyers, à un point quelconque, dont la distance au sommet de la parabole peut être nommée E, on fera la proportion $\sqrt{E}$: $\sqrt{\frac{m}{K^2-1}+m}$ :: IH : un quatrieme terme, qui sera la largeur cherchée à ce point.

Les deux bajoyers seront donc arrondis suivant les courbes EbStI, GRSTH, dont la propriété est de se prêter au courant, de la maniere la plus propre à faciliter l'accélération proportionnelle de l'eau dans des espaces convenables, et de diminuer ainsi la contraction, autant que la mesure du passage et la longueur des bajoyers le permettent.

L'expérience montre que quand un courant rétréci et gêné dans un passage étroit, vient à se dilater dans un lit plus large, il s'épanouit en formant des arcs qui conviennent à un triangle équilatéral curviligne, dont le côté est égal à la largeur du courant. Ainsi, du centre K, et de l'ouverture KH=HI, on décrira l'arc HL, et son semblable IM.

214. Les choses resteraient dans le même état, si, au lieu de jeter le rétrécissement sur les deux bajoyers, on plaçait dans la riviere une pile LHTSREOPQI; en remarquant néanmoins que le périmetre des deux passages que forme cette pile étant plus grand que celui du passage unique, il y aura un peu plus de frottement, et que la plus grande rapidité du courant se trouvant dans le milieu du lit ordinaire, tandis que la plus petite Fig. 25.

est près des rives, la pile opposera plus de résistance, et gênera davantage le courant que ne font les bajoyers de la fig. 22.

Fig. 24. 215. Mais si, en conservant aux bajoyers la moitié de leur courbure E*opqi*, on faisait dans le milieu une pile, dont la courbure fût GRSTHL, et dont les épaisseurs ne fussent que moitié des épaisseurs correspondantes de la pile précédente, la somme des largeurs de passage serait la même qu'auparavant, et l'eau n'éprouverait pas plus de difficulté à passer par ces deux ouvertures que par celle de la fig. 23; il paraît, au contraire, que le choc y serait moindre contre chaque face de la pile, et que cette disposition serait plus avantageuse.

216. Si on considere les piles tracées suivant la méthode précédente, comme des prismes disposés pour essuyer la moindre résistance, et en opposer moins à l'eau qui coule à leur rencontre, on pourra croire que les bateaux qui sont destinés à la navigation sur de petites rivieres, et dont le volume fait une partie considérable de la section du lit, devraient être construits d'après le même principe, en sorte que leurs éléments ou leurs coupes augmentassent suivant la loi qui regle ces sections, en raison inverse des vîtesses que l'eau prendrait, en accélérant uniformément son mouvement sur leur longueur. Quoi qu'il en soit, il paraît que la forme de ces bateaux doit différer à cet égard de celle des navires qui fréquentent les grandes rivieres, et des vaisseaux destinés à la mer, indépendamment des autres considérations:

qu'on doit avoir en vue pour les derniers. Il paraît que les bateaux dont le volume se rapproche de la capacité du lit d'une riviere ou d'un canal, doivent être plus gros de l'avant, et plus renflés que les autres, et que leur arriere doit être aussi moins effilé, sans que cela nuise à la sensibilité du gouvernail, à cause de la promptitude avec laquelle le fluide se retourne derriere eux, étant renvoyé par la résistance de la rive.

217. Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette matiere, qui n'est pas directement de notre sujet; mais nous ne pouvons pas omettre de faire remarquer que la méthode générale de remédier à la contraction, peut s'appliquer à toutes les écluses de retenue et de chasse, aux portes d'eau d'entrée et de sortie des villes et places de guerre, aux jetées de l'entrée des ports, aux embouchures des tuyaux de conduite, aux robinets des fontaines, aux entonnoirs, aux buses des soufflets, et généralement à tous les canaux destinés à conduire l'eau l'air et le feu, et à conserver à ces éléments toute la vîtesse possible, en prévenant et empêchant la contraction, autant qu'on peut l'espérer. Il est vrai que nous avons fait abstraction de la petite résistance qui naît du frottement; mais cet élément peut être négligé dans des canaux dont la longueur est bornée.

218. Il faut aussi convenir que la forme aiguë et les angles affaiblis des piles tracées de cette maniere, paraissent et seraient en effet peu convenables aux avant-becs des ponts établis sur des

rivieres considérables, où il convient de s'assurer contre le choc des glaces et les coups accidentels des bateaux ou des trains de bois qui peuvent les heurter; mais, si la solidité, nécessaire en ce cas, ne permet pas d'employer le nouveau tracé dans toute sa précision, on peut du moins en conserver tout ce qui n'y répugne pas, en émoussant seulement la pointe trop aiguë des avant-becs.

219. Il nous reste à parler d'une autre espèce d'obstacles que rencontre le courant de l'eau, et dont son mouvement est plus ou moins affecté. D'abord, la présence d'un bateau en mouvement dans un canal où l'eau est dormante, ou d'un bateau en repos dans une eau courante, y donne lieu à une augmentation de frottement, qui, jointe à la difficulté que l'eau éprouve à passer par un lit rétréci, occasionne un remou proportionné. Ce remou, dans les rivieres étroites, peut se faire sentir en amont à de grandes distances, et il est sujet aux mêmes lois que nous avons indiquées ci-devant. Quand il se trouve à la file un grand nombre de bateaux, lors des crues de la riviere, et principalement quand ces bateaux sont chargés, leurs parois diminuent tellement le rayon moyen du lit, que la section est forcée de s'élever, ce qui peut causer des débordements et des ruptures de digues, qu'on préviendrait quelquefois en faisant emmener ces bateaux dans des lieux où la riviere est moins sujette à déborder.

Une autre espèce d'obstacle, moins visible, mais aussi réel, est cette sorte de roseaux qui croît dans

le fond des rivieres, et dont les feuilles se courbant suivant le fil de l'eau, lui présentent une surface multipliée, qui augmente considérablement la résistance naturelle du lit. Si, par hypothese, on connaissait la somme des périmetres de toutes les feuilles qui se trouvent à-la-fois dans la section d'une riviere, et qu'on l'ajoutât à celui du lit, on pourrait substituer cette somme, dans la formation du rayon moyen, à la place de la paroi ordinaire, exprimée par $l+2h$, et on aurait un rayon moyen extrêmement diminué, qui, combiné avec la pente qui reste la même, donnerait une vîtesse et une dépense beaucoup trop petites, si la section ne s'élevait pas assez pour compenser cette augmentation de résistance. Dans les rivieres où la dépense est nécessairement la même, malgré cet obstacle, il en résulte donc une plus grande hauteur de courant; mais dans les canaux, sur-tout quand ils sont courts, il en résulte une diminution de dépense, parce que la section ne peut pas s'élever, et que la vîtesse diminue à-peu-près comme la racine quarrée du rayon moyen. Il est donc d'une extrême conséquence de tenir toujours net et en bon état le lit des rivieres, et sur-tout celui des canaux destinés au desséchement.

Dans le temps des fortes gelées, la surface des rivieres se couvre de glace, sous laquelle l'eau continue de couler : dans cet état elle éprouve un frottement plus grand qu'auparavant, puisque la paroi exposée au frottement devient égale à $2l+2h$, au lieu de $l+2h$: en substituant donc cette

quantité dans la formation du rayon moyen, on trouverait la vîtesse qui convient aux rivieres prises; sur quoi on pourrait demander pourquoi la vîtesse devenant moindre dans ce cas, et la dépense étant censée la même, la profondeur n'augmente pas, pour compenser par la section ce qui se trouve perdu par la vîtesse. Mais on peut répondre qu'il arrive le plus souvent que, dans ces temps de gelée, la dépense des rivieres diminue réellement par l'effet naturel du froid: car la surface de la terre venant à se durcir par la rigueur du froid, la filtration intérieure des eaux de pluie, qui forme les sources, doit être considérablement ralentie, de la même maniere que l'eau ne descend plus dans un tuyau étroit quand on bouche son orifice supérieur. Si cette cause de la diminution des sources restait sans effet, par une suite de la nature particuliere du terrain, il n'y a point de doute que le niveau de l'eau de la riviere ne haussât à mesure que l'eau se couvrirait de glace.

Enfin, une derniere cause du retardement ou de l'accélération des eaux courantes, ou de la pente que prennent, sans couler, celles qui sont retenues dans des bassins ou des canaux fermés, est l'impression qu'essuie leur surface de la part des vents. Cette cause, si petite en apparence, produit des effets surprenants, quand elle agit sur les eaux de la mer. On sait que les marées ne sont jamais si hautes que quand le flux est favorisé par le vent, et qu'elles diminuent au contraire quand il lui est opposé : pour se faire une idée de l'action

du vent sur l'eau, il faudrait, par une expérience immédiate qui nous manque, connaître le rapport du frottement de l'air à celui de l'eau; mais comme les densités de ces éléments sont à-peu-près dans le rapport de 1 à 850, on peut présumer que leurs frottements suivent à-peu-près la même proportion, à vîtesses égales. Quoi qu'il en soit, il est constant que les débordements des rivieres augmentent avec la hauteur de leurs eaux, quand le vent souffle avec violence dans la direction contraire à leur cours, et qu'ils diminuent au contraire très-sensiblement, quand le vent souffle dans le sens du courant.

220. Nous ne pouvons omettre une observation qui paraît d'abord plus curieuse qu'importante, mais qui, étant approfondie, jette beaucoup de lumiere sur notre théorie, et peut d'ailleurs servir au progrès de celle de la résistance des fluides; nous la plaçons ici à cause du rapport qu'elle a avec le mouvement uniforme de l'eau.

Un corps flottant librement sur la surface d'un courant uniforme, doit y prendre, et y prend en effet une vîtesse uniforme, plus grande que celle du filet du milieu de la surface de ce courant. Cette vérité est un corollaire assez simple du principe fondamental du mouvement uniforme, et qui n'avait pas besoin, pour être confirmé, du témoignage de l'expérience que nous en avons faite, et de celui des bateliers accoutumés à la navigation des rivieres, qui la connaissent depuis long-temps.

Quand un corps quelconque flotte sur un cou-

rant qui a une pente exprimée par $\frac{1}{b}$, il est situé sur un plan incliné, et a par conséquent une force accélératrice égale au produit du poids du volume d'eau qu'il déplace par la fraction $\frac{1}{b}$; cette force tend à le faire descendre, et elle accélérerait sa descente à l'infini, si le corps n'éprouvait pas de résistance : or, si on suppose que ce corps se meuve seulement avec la vîtesse du fluide qui l'environne et qui le porte, il sera en repos relativement au fluide, et n'essuiera de sa part aucune résistance. Ainsi sa force accélératrice restera entiere, et lui imprimera de nouveaux degrés de vîtesse, jusqu'à ce que l'excès de sa vîtesse sur celle du fluide produise un choc qui soit égal à cette même force; alors il continuera de se mouvoir uniformément, et à chaque instant sa force accélératrice fera équilibre à la résistance qu'il éprouvera de la part du fluide.

Plus le volume d'eau déplacé par le corps sera considérable, plus la force accélératrice du corps sera grande, et plus grand aussi sera l'excès de la vîtesse uniforme qu'il acquerra sur celle du fluide; mais, par la raison contraire, plus petit sera le volume d'eau déplacé par le corps, plus sera petit l'excès de sa vîtesse uniforme, et enfin, quand le volume d'eau sera égal en grosseur à une molécule élémentaire d'eau, sa vîtesse sera égale à celle de la molécule elle-même.

221. On peut juger par-là qu'indépendamment de la viscosité de l'eau, qui en rend les molécules

plus dépendantes les unes des autres, la vîtesse d'un filet placé à la surface d'un courant deviendrait toujours uniforme, par la résistance que causerait l'excès de sa vîtesse sur celle du filet inférieur : car il suffit que cette résistance soit égale à la force accélératrice du filet. On en peut dire autant d'une seule molécule considérée abstractivement.

Il suit de là qu'un corps qui flotte au gré d'un courant bien réglé, se placera toujours de lui-même au milieu de la largeur de ce courant, et en suivra le fil d'eau sans s'en écarter, parce que c'est le lieu où il éprouve le moins de résistance pour acquérir la plus grande vîtesse uniforme qui lui convient; que plus le volume d'eau qu'il déplace est grand, plus il a de penchant à se maintenir dans cette place, et à en écarter des corps moindres que lui; et qu'il n'y a que les sinuosités et les coudes du courant, ou l'action étrangere du vent, qui puisse troubler cet ordre.

Il suit encore de là que si la surface du courant se trouve chargée d'un grand nombre de corps flottants, sa vîtesse doit en être augmentée, et devenir plus grande que si ces corps étaient remplacés par des portions égales d'un fluide homogene. Ainsi la vîtesse des rivieres qui charient, à la suite des dégels, ou qui sont couvertes de bois flottants, doit être plus grande que dans leur état naturel.

Enfin, une derniere conséquence est que, parmi plusieurs corps qui flottent librement sur un courant bien réglé, et qui déplacent des volumes

d'eau égaux entre eux, celui dont la forme est disposée à éprouver moins de résistance pour se mouvoir dans le fluide, acquerra une vîtesse uniforme plus grande que tous les autres; tellement qu'on peut parvenir à connaître la résistance absolue d'une sphere, par exemple, en observant le rapport constant de sa vîtesse uniforme propre, à celle du courant sur lequel elle flotterait, y étant entièrement plongée, au moins sensiblement. Car il est clair que cette résistance serait égale au produit de son volume d'eau par la pente du courant, quantité qu'il faudrait égaler à sa surface multipliée par le quarré de l'excès de sa vîtesse sur celle du courant divisé par un nombre constant. Si donc les résistances des corps semblables, mus dans l'eau, sont comme les surfaces de ces corps, et comme les quarrés des vîtesses, il suit que deux spheres de diametres différents, prendroient, en flottant sur un même courant, des vîtesses dont les excès sur la vîtesse du courant seraient proportionnels à leurs diametres.

222. Dans un courant uniforme et bien réglé, la surface de l'eau d'une riviere, d'un bord à l'autre, n'est pas terminée par une ligne droite, mais par une courbe convexe; c'est-à-dire que le milieu est plus élevé que les bords. Cet effet dépend de l'inégalité des vîtesses des différents filets qui composent la section. L'expérience montre, comme nous le ferons voir en parlant de la pression que l'eau exerce contre les parois de son lit, que cette pression est d'autant plus grande, que la vîtesse est

moindre que celle qui est due à la force motrice. Ainsi, dans un tuyau horizontal, qui a une certaine hauteur de réservoir, si la vîtesse dans le tuyau est forcée de diminuer par quelque obstacle, comme un rétrécissement à son extrémité inférieure, la pression intérieure que l'eau exerce contre les parois augmente à proportion que l'obstacle rend la vîtesse moindre. De même, en considérant la veine fluide d'une riviere comme divisée en plusieurs faisceaux de filets, dont les forces motrices sont égales, puisqu'ils ont tous même pente, mais dont les vîtesses sont d'autant moindres que la paroi est plus voisine, on voit que ceux qui essuient par cette cause une plus grande perte de vîtesse, doivent exercer une plus grande pression dans tous les sens que ceux dont la vîtesse perdue est moindre, et que la somme des faisceaux qui perdent le plus de vîtesse est plus grande vers les bords du courant que dans le milieu; d'où il résulte que pour qu'il y ait équilibre entre ces pressions latérales et inégales, il faut que la surface du fluide s'éleve vers le milieu du courant, en même temps qu'elle s'abaisse vers les bords; mais la fleche que forme cet arc est presque toujours insensible, parce que la différence des vîtesses du milieu et des bords n'est jamais très-grande, à moins que des causes assez rares, comme beaucoup de roseaux vers les bords, et une accrue considérable dans le lit, n'augmentent la vîtesse du milieu du courant, et n'anéantissent presque celle des rives.

223. Cette surface, au contraire, peut devenir concave par des causes opposées, comme il arrive à l'embouchure des fleuves, quand les eaux de la mer y remontent par le flux. Car ces eaux trouvant moins de résistance vers les bords qu'au milieu du fleuve, elles s'y portent plus rapidement, et l'ordre des vîtesses s'y trouvant interverti, une moindre pression vers les rives y occasionne une plus grande élévation du fluide.

Le même effet a lieu momentanément quand un courant se trouve subitement arrêté par la chûte d'une vanne qui lui ferme le passage; on peut alors observer un double mouvement dans les eaux supérieures et inférieures de la riviere. En amont, le remou produit par le choc du fluide contre la vanne, forme un flot qui remonte contre le courant avec une vîtesse opposée et proportionnée à la sienne, et qui se rend plus sensible vers les bords, contre lesquels il s'éleve avec bruit, sur-tout s'ils sont en talus. En aval, le milieu du courant s'éleve avec le reste de la vîtesse précédente, tandis que les bords, où la vîtesse était moindre, se soutiennent quelques instants plus élevés. Ainsi l'affluence de l'eau d'amont, et la fuite de l'eau d'aval, produisent le même effet, de donner la forme concave à la surface du courant que la vanne vient de séparer.

SECTION IV.

DES CONDUITES D'EAU ET DU MOUVEMENT IRRÉGULIER DANS LES TUYAUX.

224. Après avoir considéré dans les trois premieres sections de cette premiere partie le mouvement de l'eau en grandes masses, c'est-à-dire tel qu'il a lieu dans les grands canaux formés par la nature même; après avoir reconnu que les lois générales sont les mêmes pour toutes les proportions de grandeur, et que si la sagesse du Créateur s'est jouée dans des œuvres dignes d'elle, l'homme peut à son tour s'exercer dans des ouvrages proportionnés à ses forces, et relatifs à ses besoins ou à ses plaisirs, pourvu qu'il soit fidele à copier ces grands modeles; nous allons, dans cette quatrieme section, nous occuper du mouvement de l'eau en petites masses, afin qu'à l'aide des regles précédemment établies, ou de celles qu'une observation mieux dirigée fera découvrir encore, les hydrauliciens puissent, dans leurs divers travaux, approcher de plus en plus de la perfection, en remplaçant une routine aveugle par des principes sûrs, puisés dans la nature.

Les conduites d'eau, soit par des aquéducs ouverts, ou par des tuyaux fermés, vont d'abord nous occuper, et ne présentent pas de grandes difficultés; mais le mouvement dans les tuyaux

destinés à fournir des jets d'eau, dans les conduites composées de tuyaux de différents diametres, et qui divisent leurs eaux en plusieurs rameaux, et enfin, dans les corps de pompes ou autres machines hydrauliques, exige des considérations particulieres, que nous tâcherons de développer avec clarté, et en peu de mots.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement de l'eau dans les aquéducs.

225. Les aquéducs sont une copie en petit des canaux et des rivieres; le fluide qui s'y meut est assujetti aux mêmes lois : s'ils sont creusés dans la terre, leur lit doit avoir la même figure, et être soumis au même régime; mais si leurs parois sont en bois ou en maçonnerie, il n'y a plus de régime à observer : la figure de la section cesse d'être nécessitée; la loi de la simplicité, de l'économie, et de la plus grande dépense d'eau doit seule alors être consultée, et il faut se fixer à la forme rectangulaire, dans laquelle la base est le double de la hauteur.

Nous ne pouvons donner un exemple de l'application des principes précédents qui soit plus intéressant et plus agréable au public, que celui du projet de M. de Parcieux d'amener à Paris les eaux de la riviere d'Yvette. Cet académicien, si recommandable par l'utilité de ses vues, n'avait eu be-

soin que de simples apperçus pour concevoir la possibilité de cette opération, et donner une estimation assez exacte de la dépense.

Il proposait de prendre les eaux de l'Yvette à environ 18000 toises de Paris, et de les conduire par un canal ouvert, qui devait passer sous terre dans quelques parties, et être porté dans d'autres par des arceaux, pour traverser les vallons; ce canal, ou aquéduc rectangulaire, revêtu en maçonnerie dans tout son pourtour, devait avoir 7 à 8 pieds de largeur, sur 2 ou 3 de profondeur. On voit déja que ces dimensions ne sont pas dans le rapport le plus avantageux, et nous allons montrer d'ailleurs qu'elles sont trop considérables, d'après les données de M. de Parcieux. Nous ne faisons pas ces remarques pour critiquer le dispositif de l'inventeur; mais pour faire sentir que les plus grands talents de l'artiste doivent emprunter de la théorie une marche assurée, qui ne laisse rien à l'incertain, et qui évite les à-peu-près que la prudence oblige, dans le doute, de forcer toujours un peu, pour assurer la réussite d'un projet. Il a mesuré que l'Yvette et le Gif pouvaient fournir 1200 pouces d'eau dans les temps les plus secs, de sorte que les eaux, à leur moyenne hauteur, donnaient une dépense de 16 à 1800 pouces d'eau; il estimait que, depuis la prise d'eau jusqu'à l'arrivée actuelle des eaux d'Arcueil, où il faisait aboutir son canal, il se trouvait une pente d'environ 50 pieds; mais nous ne compterons ici que sur 30, parce qu'il en fallait 5 pour un filtre de gravier, à

travers lequel les eaux devaient passer avant d'entrer dans Paris, et que nous supposons les 15 autres pieds employés à vaincre la résistance des coudes indispensables, à fournir des augmentations de pente dans plusieurs parties, et à compenser les erreurs qu'il peut y avoir dans le nivellement.

Il s'agit donc de chercher les dimensions d'un canal rectangulaire qui fournisse environ 1700 pouces d'eau, avec une pente de 30 pieds sur 18000 toises, ou de $\frac{1}{3600}$: or, d'après notre formule, on trouvera qu'en supposant la section de 8 pieds quarrés, ayant 4 pieds de largeur sur 2 de hauteur, la vîtesse moyenne serait de 16^{p},8, ce qui donne une dépense de 11^{p},2 cubes par seconde; et en prenant l'évaluation la plus ordinaire du pouce d'eau, de 14 pintes par minute, la pinte de 36 au pied cube, chaque pied cube par seconde revient à 154$\frac{2}{7}$ pouces d'eau, et la dépense totale à 1728 pouces d'eau. Ainsi, au lieu des dimensions fixées par M. de Parcieux, il suffirait d'avoir un canal de 4 pieds de largeur sur 3 pieds de hauteur, dans lequel l'eau se tiendrait ordinairement à 2 pieds de profondeur; il resterait un pied de hauteur pour les crues extraordinaires.

On peut voir tous les avantages de ce projet dans trois mémoires de son auteur, insérés parmi ceux de l'Académie des Sciences pour les années 1762, 1766 et 1767. Nous allons l'examiner sous un autre point de vue, d'après un mémoire de M. Perronet, qu'on trouve dans le même recueil, année 1775.

M. de Parcieux avait en vain poursuivi jusqu'à sa mort l'exécution de son projet; ce ne fut qu'en 1769 que le Gouvernement chargea MM. Perronet et Chezy d'en faire tous les détails estimatifs et préliminaires. Ces ingénieurs ont exécuté avec précision le plan et le nivellement de l'Yvette et de tous les ruisseaux adjacents, ce qui leur a donné le moyen de rectifier les premieres vues; ils ont vu qu'on pourrait sans inconvénient prendre 450 pouces d'eau de la Bievre, dans le temps des sécheresses, de sorte qu'on peut se procurer 2000 pouces d'eau pendant la plus grande partie de l'année. La dépense totale pour amener à Paris cette quantité d'eau, est estimée à 7826209 liv. Nous n'examinerons point la possibilité de recouvrer cette somme par la vente détaillée de quantité de filets d'eau aux particuliers; nous n'avons en vue que d'examiner ce travail par rapport aux dimensions du canal; nous ajouterons seulement que c'est par les soins de M. de Trudaine qu'on a placé 222 bornes de grès, qui fixent invariablement la direction et le nivellement du fond du canal.

Les nouvelles mesures ont fait connaître que l'aquéduc de l'Yvette aurait 17352 toises de longueur, dont 15141 à découvert, et le reste en 15 parties passant sous terre, non compris 2809 toises pour conduire les eaux de la Bievre dans l'aquéduc principal. M. Perronet exhausse de 6 pieds la prise d'eau fixée par M. de Parcieux, afin de procurer de l'eau à l'Estrapade, quartier le plus

6 pouces de profondeur, d'autant mieux que si on craignait une trop grande abondance d'eau dans les crues extraordinaires, on pourrait établir à l'origine du canal un reversoir qui ferait écouler le trop plein des eaux dans l'ancien lit de l'Yvette. Il serait peut-être utile de diminuer la largeur, en augmentant la hauteur que nous venons de déterminer, afin d'économiser sur les fondations et le massif des maçonneries. En total la réduction des dimensions fixées par M. Perronet, sans nuire au succès du projet, peut en faciliter l'exécution, et en diminuer la dépense. Nous nous bornons à ce seul exemple pour abréger, et passer aux tuyaux de conduite.

CHAPITRE II.

Du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

226. Le tableau de comparaison des résultats de notre théorie avec ceux de quantité d'expériences sur les tuyaux (53), montre assez évidemment qu'on connaît la relation entre la vitesse moyenne, la hauteur de réservoir, le diametre et la longueur d'un tuyau de conduite : la régularité et la similitude de la section des tuyaux circulaires et fermés semblerait devoir simplifier leur calcul, et en rendre les résultats moins compliqués que ceux des rivieres; et cela arriverait en effet, si on faisait

abstraction de la charge nécessaire pour imprimer la vîtesse; mais comme cette charge fait ordinairement partie de la hauteur du réservoir, qui, avec le diametre et la longueur du tuyau, sont les données communes, il reste quelque difficulté à cet égard, que les problêmes suivants vont applanir.

PROBLÊME.

227. Connaissant la hauteur de réservoir, la longueur et le diametre d'un tuyau de conduite; déterminer sa dépense.

Soient H la hauteur du réservoir, et L la longueur développée du tuyau : le diametre étant connu, on en déduira son rayon moyen, qui en est toujours le quart; et il suffira de déterminer la vîtesse moyenne V, pour en conclure la dépense cherchée; la hauteur due à la vîtesse moyenne est $\frac{V^2}{2G}$, comme on l'a vu ci-devant (9). Ainsi, la pente fictive du tuyau, exprimée par $\frac{1}{b}$, est égale à $\frac{H-\frac{V^2}{2G}}{L}$; de sorte que $b=\frac{L}{H-\frac{V^2}{2G}}$; mais cette valeur étant mise dans la formule $V=\frac{\sqrt{ng}\,(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}-L\sqrt{b+1,6}}-0,3\,(\sqrt{r}-0,1)$, celle de la vîtesse devient extrêmement compliquée.

228. Pour éluder cette difficulté, on peut avoir recours à une approximation, en observant, 1° que la hauteur due à la vîtesse est ordinairement très-petite, en comparaison de la hauteur

entiere du réservoir; 2° que dans un même lit les résistances sont sensiblement proportionnelles aux quarrés des vîtesses, quand celles-ci different peu entre elles. On supposera donc $b = \frac{L}{k}$, en prenant par apperçu pour h une quantité un peu moindre que H, et on calculera la vîtesse moyenne v, qui lui est relative : si la somme $h + \frac{v^2}{2G}$, se trouve égaler H, on aura trouvé d'abord la véritable vîtesse; mais si ces quantités different, on fera la proportion suivante, $h : \frac{v^2}{2G} :: H - \frac{V^2}{2G} : \frac{V^2}{2G}$, qui se réduit à celle-ci : $h + \frac{v^2}{2G} : v^2 :: H : V^2$. Cette méthode donne toute la précision qu'on peut desirer; et c'est elle dont nous nous sommes servis pour calculer toutes les expériences sur les tuyaux, rapportées dans le tableau général (55).

229. Si la conduite faisait un certain nombre de sinuosités connues, une partie de la charge serait employée à vaincre cette résistance, qui serait encore proportionnelle au quarré de la vîtesse. On pourra exprimer par $\frac{V^2}{m}$ cette quantité que nous avons déterminée ci-devant (105) pour une seule bricole, en y faisant entrer le nombre et la nature des bricoles. Alors la charge, qui fera équilibre à la résistance des parois, sera $H - \frac{V^2}{2G} - \frac{V^2}{m} = H - V^2\left(\frac{1}{2G} + \frac{1}{m}\right)$; et la proportion précédente deviendra celle-ci : $h : v^2\left(\frac{1}{2G} + \frac{1}{m}\right) :: H - V^2\left(\frac{1}{2G} + \frac{1}{m}\right) :$

$V^2\left(\frac{1}{2G}+\frac{1}{m}\right)$; et on aura de même $h+v^2\left(\frac{1}{2G}+\frac{1}{m}\right)$: v^2 : : H : V^2.

PROBLÊME.

230. Connaissant la hauteur de réservoir, et la longueur d'un tuyau de conduite; on demande quel doit être son diametre, pour obtenir une dépense donnée.

Le rayon moyen étant toujours le quart du diametre, si c exprime le rapport de la circonférence du cercle au diametre, $4cr^2$ exprimera la section du tuyau; et si on divise la dépense D par cette quantité, $\frac{D}{4cr^2}$ sera la vîtesse moyenne de l'eau dans le tuyau. Maintenant, si on divise la longueur du tuyau par la hauteur du réservoir un peu diminuée, on aura la valeur de b, d'où l'on conclura à très-peu-près celle de $\sqrt{b}-L\sqrt{b+1,6}$, ou $\sqrt{B}$. Alors la formule ordinaire devient $\frac{D}{4cr^2}=\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{B}}-0,3(\sqrt{r}-0,1)$, qui se réduit, en négligeant le dernier terme, et la quantité 0,1, à $\frac{D^2B}{16c^2ng}=r^5$, ou $r=\left(\frac{D\sqrt{B}}{4c\sqrt{ng}}\right)^{\frac{2}{5}}$. Il est vrai que cette opération rend le rayon moyen un peu trop petit; mais il sera aisé de le rectifier : car l'équation précédente fait voir que, quand deux tuyaux ont même longueur et même hauteur de réservoir, les quarrés de leurs dépenses sont entre eux sensiblement comme les cinquiemes puissances des rayons moyens ou des diametres. On pourra donc,

d'après ce rapport, rectifier le rayon moyen que l'équation aura donné, et l'on obtiendra le diametre presque aussi exactement, et bien plus simplement que par la résolution d'une équation composée du cinquieme degré. Voici un exemple de cette approximation.

231. Supposons un réservoir élevé de 20 pieds au-dessus du point où on veut amener les eaux, et qui en peut fournir 10 pieds cubes par minute; le tuyau doit avoir 600 toises de longueur; on demande le diametre qu'il faut lui donner.

La dépense par seconde, ou $D = 288$ pouces cubes; et si on retranche, par exemple, un pouce de la hauteur du réservoir, pour celle qui est due à la vîtesse, on aura $\frac{1}{b} = \frac{239}{43200} = \frac{1}{180,75}$, d'où l'on déduit $\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}$, ou $\sqrt{B} = 10,844$. Ainsi on aura $r = \left(\frac{D\sqrt{B}}{4c\sqrt{ng}}\right)^{\frac{2}{5}} = 0,931$, et $\sqrt{r} - 0,1 = 0,8648$: or, si on calcule exactement la vîtesse et la section relatives à ce rayon moyen, on trouvera l'une de 23po,517, et l'autre de 10,896424, dont le produit donne une dépense de 256,25, au lieu de 288. Ainsi le rayon moyen est trop faible. Pour le rectifier, on fera la proportion suivante : $\overline{256,25}^{\frac{2}{5}} : \overline{288}^{\frac{2}{5}} :: 0,931 :$ un quatrieme terme, qui sera le rayon moyen très-approché; et calculant cette proportion par les logarithmes, on trouve celle-ci : 9,1902 : 9,6329 :: 0,931 : 0,9758. Ainsi, le diametre du tuyau devient 3po,9032, ou 3 pouc. 10 lig. $\frac{5}{6}$; en calculant la vîtesse et la section qui

répondent au rayon moyen 0,^{po}9758, qu'on vient de trouver, on a V=23^{po},724, et la section 11^{po},97 quarrés, dont le produit donne la dépense 283,976, qui, à la vérité, est encore un peu faible, mais qui deviendrait trop grande, si on augmentait le diametre de $\frac{1}{35}$ de ligne. On aurait obtenu une approximation plus exacte, si, sachant par apperçu que le rayon moyen doit être environ 0^{po},9, et qu'il doit être diminué de 0,1 dans le calcul exact de la vîtesse, ce qui le réduit de $\frac{1}{9}$, on avait, pour compenser l'erreur qu'on commet en négligeant cette quantité, diminué la valeur de $\sqrt{ng}$, à-peu-près dans le même rapport, en la faisant de 270, au lieu de 297. Dans ce cas, on aurait trouvé d'abord r=0,9674, la vîtesse 23^{po},92, l'aire du tuyau 11^{po},7604, la dépense 281^{po},3; et après la rectification, on aurait eu r=0^{po},9765, le diametre 3^{po},906, la vîtesse 24^{po},05, l'aire du tuyau 11^{po},98, et la dépense 288,1 pouc. cubes.

232. On sent bien, au reste, qu'on doit toujours donner au tuyau de conduite un diametre un peu plus grand qu'il n'est fixé par le calcul, à cause des dépôts terreux dont l'eau se dépouille, et qui, u bout de quelque temps, diminuent sa capacité. ette précaution est d'autant plus nécessaire, que : tuyau fait un plus grand nombre de sinuosités oans le sens vertical.

Plusieurs auteurs ont traité des moyens de rassembler les eaux, d'établir les conduites; et ont

marqué les précautions nécessaires pour les entretenir; nous n'insisterons ici que sur la nécessité d'obvier aux dépôts terreux et aux engorgements de l'air, qui diminuent considérablement les dépenses. Il convient que la prise d'eau au réservoir ne soit trop voisine ni du fond ni de la superficie constante du réservoir, afin d'en écarter les matieres hétérogenes plus pesantes ou plus légeres que l'eau. Il serait bon aussi d'augmenter le diametre des tuyaux à l'endroit des coudes inférieurs, tandis qu'on placerait des ventouses aux coudes supérieurs, pour faciliter l'évacuation de l'air qui s'y cantonne. Pour empêcher l'entrée de cet air dans les tuyaux, il faut, autant qu'il est possible, placer les robinets destinés à suspendre l'écoulement de l'eau, vers la partie inférieure, où l'eau se dégorge, afin que les tuyaux restent constamment pleins d'eau.

Nous n'entrons pas dans les menus détails de construction, ni dans l'examen de la maniere d'employer et de placer les tuyaux de conduite, selon la matière dont il sont composés, bois, fer coulé, plomb, terre cuite. Les fontainiers ont sur ce sujet des pratiques fort ingénieuses, que l'expérience a perfectionnées, et que la théorie pourrait rendre encore plus parfaites. Ce serait rendre au public un service assez important, de rassembler dans un seul ouvrage les manipulations qui ont pour objet le ciment des chapes, la pose des différents tuyaux, la maniere de les emboîter ou de les assembler, le mastic qui doit en recouvrir les joints, la ma-

niere de les renouveler, l'extraction des queues de renard, les précautions pour s'en préserver, la construction des aquéducs, des châteaux-d'eau, des réservoirs. Tous ces détails ne peuvent être traités ici.

233. La longueur d'un tuyau et la hauteur du réservoir sont ordinairement données par les circonstances locales; mais si elles ne l'étaient pas, et qu'on connût les autres éléments, il serait aisé de les déterminer. En effet, quand on connaît la dépense, le diametre du tuyau, et par conséquent la vîtesse, on peut déterminer la pente, et d'après cela on a $L = \left(H - \frac{V^2}{2G}\right)b$, et $H = \frac{L}{b} + \frac{V^2}{2G}$.

Après avoir considéré le mouvement qui a lieu quand le réservoir reste constamment plein, examinons ce mouvement lorsque le réservoir se vide.

PROBLÊME.

234. Connaissant l'étendue d'un réservoir prismatique, qui se vide par un tuyau de conduite, dont le diametre, la longueur et la hauteur primitive du réservoir sont données; on demande la relation entre la dépense et le temps.

Les expériences sur les dépenses des réservoirs qui se vident par un orifice, prouvent, comme on le verra dans le chapitre suivant, qu'à chaque instant les vîtesses à l'orifice sont sensiblement comme les racines quarrées des charges: on peut donc croire par analogie, que les vîtesses dans de longs tuyaux,

assujetties à des charges variables, suivent à chaque instant les lois du mouvement uniforme et constant; mais, pour éluder les difficultés que présente l'équation rigoureuse des vîtesses, nous nous servirons de la formule simplifiée $V=\frac{\sqrt{Ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}}$, dans laquelle on connaîtra V et $\sqrt{b}$ pour une charge quelconque, d'après le premier problême de ce chapitre; mais, comme la quantité $\sqrt{Ng}$ varie un peu à mesure que le réservoir se vide, il faudra la conclure d'après une hauteur de réservoir telle que sa racine quarrée soit moyenne proportionnelle entre celles de la hauteur primitive et de la hauteur finale. Cette préparation étant supposée, soient H la hauteur primitive du réservoir, x la quantité dont la superficie s'est abaissée pendant un temps quelconque t, exprimé en secondes, A l'aire ou la surface du réservoir, et a l'aire du tuyau. On remarquera que, pour la hauteur $H-x$, la formule simplifiée peut se transformer en celle-ci : $V=\frac{\sqrt{Ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{\frac{L}{(Hx)-\frac{V^2}{2G}}}}$; d'où l'on tire

$$V=\frac{\sqrt{H-x}}{\sqrt{\frac{L}{Ng(\sqrt{r}-0,1)^2}-\frac{1}{2G}}}$$; et, en représentant par $\sqrt{M}$ la quantité sensiblement constante

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{Ng(\sqrt{r}-0,1)^2}-\frac{1}{2G}}}$$, on a $V=\sqrt{M(H-x)}$.

Or, cette vîtesse peut être considérée comme

uniforme pendant le temps infiniment petit dt; ainsi $adt\sqrt{M(H-x)}$, sera la dépense du tuyau et du réservoir; et, en divisant cette quantité par l'aire du réservoir, on aura l'expression de l'abaissement dx de sa superficie pendant cet instant. Ainsi $dx=\frac{a}{A}dt\sqrt{M(H-x)}$; d'où l'on tire $dt=\frac{Adx}{a\sqrt{M(H-x)}}$, et en intégrant, $t=\frac{-2A\sqrt{H-x}}{a\sqrt{M}}+c$. Pour déterminer la constante et compléter l'équation, nous supposerons qu'à la fin du temps t on aura $x=h$; et on voit d'ailleurs que $t=0$ lorsque $x=0$. On a donc $0=\frac{-2A\sqrt{H}}{a\sqrt{M}}+c$, ou $c=\frac{2A\sqrt{H}}{a\sqrt{M}}$: on a donc aussi, pour la valeur complete du temps, $t=\frac{2A}{a\sqrt{M}}(\sqrt{H}-\sqrt{H-h})$; d'où l'on tire aussi $h=H-\left(\sqrt{H}-\frac{at\sqrt{M}}{2A}\right)^2$. Au reste ces formules seront d'autant plus exactes, que H sera plus grand relativement à h; et, si cette derniere quantité était considérable, on la diviserait en plusieurs parties, pour chacune desquelles on trouverait les temps; et la somme de ces temps donnerait la solution du probléme.

235. On pourrait compliquer ce probléme, en supposant qu'à mesure que le réservoir se vide, il reçoit constamment une certaine quantité d'eau, qui tend à élever sa superficie avec une vitesse par seconde qui serait exprimée par v; dans ce cas, $adt\sqrt{M(H-x)}$ représenterait toujours la dépense du tuyau pendant un instant; mais le volume

d'eau qu'il y aurait de moins dans le réservoir serait exprimé par $adt\sqrt{M(H-x)} - Avdt$; et on aurait $dx = dt\left(\frac{a}{A}\sqrt{M(H-x)} - v\right)$; d'où l'on tire $dt = \frac{dx}{\frac{a}{A}\sqrt{M(H-x)} - v}$: en intégrant cette quantité, on trouve $t = \frac{2A\sqrt{H-x}}{a\sqrt{M}} - \frac{2A^2v}{a^2M} - \frac{2A^2v}{a^2M}\log.\left(\frac{a\sqrt{M}\sqrt{H-x}-v}{A}\right) + c$; faisant t et $x = 0$, pour trouver la constante, et compléter l'équation, elle se réduit à $t = \frac{2A}{a\sqrt{M}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H-h}\right) + \frac{2A^2v}{a^2M}\log.\left(\frac{a\sqrt{M}\sqrt{H}-Av}{a\sqrt{M}\sqrt{H-h}-Av}\right)$.

236. Ce dernier cas peut s'appliquer à l'effet des fontaines intermittentes, qui coulent et tarissent dans des temps périodiques et réglés, comme quelques heures ou quelques jours. D'après l'explication ingénieuse qu'en a donnée M. Desmarets, il faut imaginer un syphon, dont la plus courte branche soit plongée dans l'eau d'un réservoir qui reçoit une certaine quantité d'eau, moindre que celle que peut dépenser le syphon, avec une charge égale à la différence de niveau des extrémités des deux branches : l'eau du réservoir montant jusqu'à la partie la plus élevée du syphon, commence à s'écouler par la plus longue branche; mais le réservoir perdant plus qu'il n'acquiert, sa superficie s'abaisse, et l'écoulement cesse lorsqu'elle se trouve au-dessous de la branche qui y

est plongée : alors le syphon se remplit d'air, et l'eau ne peut recommencer à y couler, que quand la source a élevé l'eau du bassin jusqu'au niveau du haut du syphon. La courbure qu'on remarque dans certaines couches de la terre est très-propre à donner la forme d'un syphon aux voies souterraines de l'eau des fontaines, et à produire l'effet que nous venons d'examiner. Une pareille fontaine artificielle pourrait même être utile dans la pratique, pour rassembler, dans un temps assez court, toute l'eau que fournit lentement une source située à une certaine distance.

CHAPITRE III.

Du mouvement de l'eau au passage d'un orifice.

237. Nous avons donné dès le commencement de cet ouvrage des notions générales des effets de la contraction d'orifice; et ce que nous en avons dit est suffisant pour déterminer, dans la pratique, la dépense d'un orifice dont on connaît le diametre et la charge; il eût été alors déplacé d'entrer dans la recherche des effets du frottement contre les bords de l'orifice, que nous avons confondus avec ceux de la contraction; mais quoique cette résistance puisse presque toujours être négligée, ses effets néanmoins deviennent sensibles pour les ajutages minces des jets d'eau, sur-tout lorsque la

gerbe est étroite et élevée : car la hauteur naturelle du jet, qui n'est pas diminuée par la contraction, peut l'être sensiblement par d'autres causes, dont la principale est le frottement contre les bords de l'ajutage. Ceci demande d'être approfondi.

238. Newton semble avoir indiqué le premier l'effet de la contraction ; mais c'est à M. l'abbé Bossut qu'on en doit une connaissance plus exacte : il a traité ce sujet avec une précision vraiment étonnante, et qui ne laisserait rien à desirer, s'il avoit pu varier et multiplier davantage ses expériences. Le moyen de déterminer l'effet de la contraction le plus simple en apparence, est de mesurer immédiatement le diametre de la veine contractée; mais c'est peut-être le moins exact, parce qu'on opere sur un corps fluide. Le compas de grosseur dont on se sert pour cette mesure, ne peut pas, à la vérité, pénétrer dans l'intérieur de la veine, sans qu'on en soit averti par le jaillissement de l'eau ; mais, en revanche, rien ne rectifie la vue, si les branches du compas sont un peu trop écartées. D'ailleurs, les pointes du compas, assez émoussées pour que la vue puisse s'y fixer, ne peuvent-elles pas attirer un peu les filets d'eau qu'elles sont sur le point de toucher ? Tout porte donc à croire que ce moyen doit donner le diametre de la veine trop grand. Ainsi, quoique M. l'abbé Bossut conclue assez exactement le rapport de l'aire de la veine contractée à celle de l'orifice :: 2 : 3, ou :: 1 : 1,5, par ses expériences sur la mesure immédiate des diametres,

nous pouvons, avec plus de certitude, conclure de celles qu'il a faites en même temps sur les dépenses des orifices, une plus grande diminution dans la veine.

239. Il est certain que, si au passage de l'orifice les filets n'éprouvaient ni contraction, ni aucune résistance quelconque, les dépenses seraient égales au produit de l'aire entiere de l'orifice par la vîtesse moyenne due à la hauteur de la charge. Or, la résistance produite par un orifice mince doit être bien peu sensible; ainsi le rapport des dépenses réelles aux dépenses naturelles ou sans contraction, devrait être sensiblement :: 1 : 1,5, tandis qu'il est en effet :: 1 : 1,617 et plus.

Si on pouvait être assuré de la mesure immédiate de la veine contractée, la différence entre ces rapports prouverait que les vîtesses des différents filets de cette veine ne sont pas toutes égales, ni dues à la hauteur de la charge; mais la hauteur des jets d'eau, qui indique l'intensité de la vîtesse moyenne, fait voir qu'elle est à-peu-près due à la hauteur entiere, sauf les différentes résistances que le jet éprouve; d'où il faut conclure que les vîtesses à la veine contractée sont sensiblement égales, et que la différence des résultats vient des erreurs inévitables dans la mesure immédiate de la veine. M. l'abbé Bossut en conclut le rapport simple de 1 à 1,6, ou de 5 à 8, qui est, à la vérité, très-suffisant pour la pratique; mais il nous a été important de démêler plus scrupuleusement l'effet de la pure contraction et celui de la résistance.

Les principales causes de la résistance qu'éprouve la veine, sont 1° le frottement contre les bords de l'orifice, qui se communique à toute la masse. 2° Peut-être la déviation même des particules qui se contractent. Ces deux causes doivent être plus sensibles pour de petits orifices que pour de grands. 3° L'effort que l'air oppose à la colonne d'eau, qui doit être proportionnel au quarré des vîtesses ou aux charges. Ces trois causes, et d'autres peut-être encore, que nous ne prévoyons pas, doivent retarder une vîtesse de 1,617 d'une quantité plus grande que 0,117, si la contraction ne diminue les dépenses que dans le rapport de 1,5 à 1. Quelque étonnant que soit cet effet, nous aurions craint de le révoquer en doute, si nous n'avions été éclairés par les expériences des jets verticaux : en les combinant avec celles-ci, nous nous sommes convaincus que, abstraction faite des résistances particulieres aux jets verticaux, leur hauteur est sensiblement égale à celle qui est due à la vîtesse moyenne de la veine contractée ; que cette vîtesse est bien moins diminuée que nous ne l'avions conclu d'abord ; et que le diametre de la veine contractée est plus petit qu'il ne paraît par une mesure immédiate. Il paraît que, pour des orifices horizontaux percés au fond d'un vase, la contraction est sensiblement la même à toute hauteur, pour de petits orifices, et qu'elle diminue le diametre de la veine à-peu-près dans le rapport de 1,6086 à 1. Le rapport de la dépense naturelle à la dépense réelle est encore plus grand, et est

variable, parce que la résistance retarde plus ou moins la vîtesse, suivant la charge, la figure et la grandeur de l'orifice. En nommant H la hauteur de la charge, la vîtesse naturelle est égale à $\sqrt{H}\sqrt{724}=\sqrt{2gH}$; et nous supposerons que la vîtesse réelle moyenne au point de contraction, ou $V=\sqrt{H}\sqrt{2g-K}$, en nommant K une quantité qui exprime l'effet de la résistance, et qu'il faut déterminer dans tous les cas. Pour abréger, nous n'entrerons pas dans le détail de toutes les recherches que nous avons faites à cet égard; il nous suffira de constater notre opinion par la comparaison de nos résultats à ceux de l'expérience, tant sur la dépense des orifices que sur le temps que les vases mettent à se vider, et sur l'élévation des jets.

240. Nous avons donc remarqué, 1° que les vîtesses et la contraction des orifices quarrés étaient, à même charge, constamment les mêmes que celles des orifices circulaires, dont les diametres étaient égaux aux côtés des premiers. Comme ces figures ont des rayons moyens égaux, et que les dépenses diminuent avec les rayons moyens, nous avons conclu d'abord que les quantités K pouvaient être relatives à l'inverse des rayons moyens, ou à $\frac{1}{r}$. 2° Il nous a paru qu'à même charge ces quantités diminuaient en moindre raison que l'inverse des rayons moyens, et qu'elles pouvaient être représentées par $m\left(\frac{1}{r}+n\right)$, en nommant m et n des quantités constantes pour une

même charge. 3° Les expériences nous ont encore induits à croire que les quantités m et n variaient suivant le rapport des vîtesses, et que la valeur générale de K était $\frac{V}{223}\left(\frac{1}{r}+\frac{V}{79}\right)$, que nous exprimerons par $\frac{V}{m}\left(\frac{1}{r}+\frac{V}{n}\right)$. Il semble que les deux dernieres lois sont relatives au choc de l'air, qui peut croître en plus grande raison que le quarré des vîtesses, du moins quand il résiste à une colonne fluide. Ainsi la valeur générale de la vîtesse V est $V = \sqrt{H}\sqrt{2g - \frac{V}{m}\left(\frac{1}{r}+\frac{V}{n}\right)}$; d'où l'on tire $V =$

$$-\frac{H}{2mr\left(1+\frac{H}{mn}\right)} + \sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{H}{mn}} + \left(\frac{H}{2mr\left(1+\frac{H}{mn}\right)}\right)^2}.$$

Nous présenterons dans le temps les résultats de cette formule pour les jets d'eau, pour ne nous occuper ici que des vîtesses aux orifices. Dans les premieres expériences de M. l'abbé Bossut, les orifices sont percés horizontalement au fond d'un vase, sous une charge constante de 11^{pi} 8^{po} 10^{li}; en divisant leurs dépenses par seconde par la section de l'orifice, diminuée dans le rapport de 1,6086 à 1, nous en avons conclu les vîtesses d'expérience. On peut les comparer, dans le tableau suivant, aux vîtesses calculées d'après la formule, et à la vîtesse naturelle due à 11^{pi} 8^{po} 10^{li} de hauteur, qui est de 319,31.

Exp.	Figure des orifices.	Dimensions des orifices.		Rayons moyens.	Vitesses d'expérience.	Vitesses calculées.
e.		po.	l.	po.	po.	po.
1	circul.	0	6	0,125	315,5	315,5
2	id.	1	0	0,250	316,8	316,8
3	id.	2	0	0,500	317,4	317,4
4	rectang.	1 sur	3	0,100	314,5	314,8
5	quar.	1	0	0,250	316,8	316,8
6	quar.	2	0	0,500	317,4	317,4

241. Une telle comparaison donne une idée bien avantageuse de la précision de M. l'abbé Bossut, et peut donner quelque confiance à la formule que nous avons déduite, quant à la grandeur des orifices horizontaux. La loi relative aux hauteurs sera prouvée par les jets d'eau. Il résulte de cette loi, que la résistance de l'air augmentant en plus grande raison que les charges, doit limiter la vîtesse même pour des charges infinies. En effet, la formule $V = \sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{H}{mn}} + \left(\frac{H}{2mr\left(1+\frac{H}{mn}\right)}\right)^2} - \frac{H}{2mr\left(1+\frac{H}{mn}\right)}$ montre que la vîtesse augmente de moins en moins, à mesure que la charge s'éleve. En supposant cette charge infinie, on peut négliger l'unité dans les dénominateurs; alors les quantités H se détruisent, et on a, pour la plus grande vîtesse possible, à un orifice d'un pouce de diametre, V=3416 pouces, qui répond à une chûte de 1343 pi. 2 po., limite des plus grands jets d'eau d'un pouce de grosseur. Nous verrons encore que plusieurs causes, auxquelles on ne peut obvier,

tendent à diminuer considérablement les grandes élévations des jets.

Nous sommes néanmoins bien éloignés de vouloir conclure d'un aussi petit nombre d'expériences les limites précises de la nature : notre but a seulement été de montrer que la vîtesse des orifices est bornée, comme le prouvent quantité d'expériences de M. Mariotte. Celles qui ont été faites sur la résistance que l'eau éprouve contre un corps solide flottant à la surface, semblent prouver aussi que ces résistances augmentent en un rapport un peu plus grand que les quarrés des vîtesses. Il est vrai que cette différence peut être négligée dans les limites ordinaires de la vîtesse des eaux courantes, et de celles des corps qu'on fait mouvoir dans cet élément ; mais il est à présumer que les résultats seraient bien différents pour de très-grandes vîtesses. Au reste, il paraît que la résistance de l'air ne commence à devenir sensible que pour des vîtesses dues à des chûtes de 3 à 4 pieds : aussi l'avons-nous négligée dans nos expériences sur le mouvement uniforme, où les vîtesses n'étaient dues qu'à des chûtes de 10 pouces au plus.

242. Les expériences sur les orifices verticaux, que nous devons encore à M. l'abbé Bossut, présentent des résultats aussi satisfaisants, comme on en peut juger par le tableau suivant.

Exp.	Diametres des orifices.	Charges.	Vitesses d'expérience.	Vitesses calculées.
e.	po. li.	pi.	po.	po.
7	0 6	9	275,5	276,8
8	1 0	9	277,7	277,8
9	0 6	4	184,7	185,3
10	1 0	4	185,6	185,7

Dans les dix expériences qui composent ces deux tableaux, la septieme et la neuvieme sont les seules qui, dans leur résultat, présentent une différence un peu sensible, soit que la contraction soit un peu plus forte pour la veine horizontale, dans les petits orifices, soit qu'il y ait eu une légere erreur dans l'estimation du diametre de 6 lign. Il suffit en effet, pour rectifier les résultats, de supposer ce diametre plus petit de $\frac{1}{100}$ de ligne. (*Voy.* la fin du chap. VI.)

243. Pour confirmer encore la précision de la formule précédente, nous avons examiné comment elle s'accordait avec quelques expériences de M. l'abbé Bossut sur les réservoirs qui se vident par des orifices minces. Nous supposerons qu'à chaque instant la vitesse à l'orifice peut se déduire de la hauteur du réservoir, comme si cette hauteur restait constante; hypothese qui est plus que vraisemblable, comme on peut le voir par le tableau suivant. Ainsi, en se servant des mêmes données, employées déja ci-devant (234) pour les réservoirs qui se vident par des tuyaux de conduite, on a, pour chaque instant, $V = \sqrt{2g-K}\sqrt{H-x}$, d'où il suit que $\sqrt{2g-K}$ est égal à ce que nous

avons exprimé par $\sqrt{M}$ dans les tuyaux. Ainsi l'équation $t = \frac{2A(\sqrt{H} - \sqrt{H-h})}{a\sqrt{2g-K}}$ donne la relation entre le temps et la quantité h dont l'eau s'est abaissée dans le réservoir : l'aire de la veine contractée, ou celle de l'orifice, divisée par 1,6086, est ici représentée par a. Quant à la valeur de K, elle doit à la rigueur varier un peu à chaque instant; mais comme elle est bien moins relative aux hauteurs des charges qu'à la grandeur de l'orifice, qui ne varie pas, on peut, sans erreur sensible, employer la valeur qui convient à la vîtesse moyenne entre les deux vîtesses extrêmes. C'est ainsi qu'ont été calculées les expériences suivantes. La hauteur primitive du réservoir ou H=11 pi. 8 po. L'aire A du réservoir est un quarré de 3 pieds de côté; les orifices sont placés horizontalement au fond du réservoir.

Diamètre des orifices.	Valeurs de h.	Valeurs moyennes de K.	Temps suivant la théorie.		Temps suivant l'expérience.	
po.	pi.	po.	′	″	′	″
1	4	9,77	7	25,09	7	25,5
2	4	7,24	1	51,07	1	52,0
1	9	7,25	20	24,53	20	24,5
2	9	5,21	5	5,70	5	6,0

On peut observer que la seconde expérience est la seule qui présente une différence d'une seconde; et cette erreur vient probablement du temps observé. En effet, sans avoir égard à la différence des résistances, ce temps devrait être le

quart de celui de la premiere, ou 1′ 51″,375; mais, à cause d'une résistance plus faible, il doit être un peu moindre, comme le donne la formule. Si on n'avait égard à aucune résistance, et qu'on diminuât simplement les orifices dans le rapport de 8 à 5, pour l'effet de la contraction, les temps seraient tous un peu faibles, et on les trouverait suivant le même ordre de 7′ 22″,36 : 1′ 50″,59 : 20′ 16″ : 5′ 4″.

L'exactitude de tous ces résultats prouve qu'on peut connaître le véritable diametre de la veine contractée, la vîtesse moyenne au point de la plus grande contraction, et par conséquent le déchet que la vîtesse naturelle éprouve par la résistance, du moins pour des orifices percés dans de minces parois, et pour un réservoir très-étendu, en comparaison de leur ouverture; mais si le réservoir se rétrécit vers l'orifice, si des obstacles s'opposent de quelque côté à l'affluence uniforme des filets d'eau, la théorie précédente se trouve alors en défaut, et ne peut, tout au plus, que servir de guide, pour ne pas trop s'écarter de la vérité (1).

(1) Parmi les Mémoires de l'Académie pour 1766, on en trouve un de M. le chevalier de Borda sur la théorie des fluides, qui contient des expériences semblables; leurs résultats s'accordent avec les précédents. C'est de là que nous avons directement déduit la contraction qui a lieu quand un tuyau est enfoncé dans un réservoir, et que l'eau n'en suit pas les parois. Nous avons trouvé par induction celle qui convient au même tuyau coulant plein. (*Voy.* § 9.)

244. Quand la veine s'est contractée après le passage de l'orifice, ses filets deviennent divergents, pour occuper une plus grande section; et s'ils rencontrent alors les parois d'un tuyau, la résistance qu'ils éprouvent par le choc et le frottement, occasionne un remou qui agit sur la veine contractée, plus sensiblement cependant sur ses bords que vers le centre, et tend à l'élargir. Ainsi, à même charge, des tuyaux additionnels de quelques pouces de longueur donnent plus de dépense que des orifices minces de même diametre. Malgré cette réaction, le filet de l'axe conserve toujours sensiblement la vîtesse due à toute la hauteur de la charge; mais la vîtesse des filets va en diminuant du centre à la circonférence. La longueur du tuyau additionnel semble devenir un élément de plus dans les expériences de M. l'abbé Bossut : il pense avec raison qu'il faut une certaine longueur, pour que le gonflement de l'eau antérieure ait toute son intensité, et produise le plus grand élargissement de la veine contractée. Ayant adapté verticalement à un même réservoir des tuyaux d'un pouce de diametre, et de 6 lignes, 24 lignes et 48 lignes de longueur, les derniers ont dépensé plus que les premiers; mais ces dépenses sont exactement proportionnelles aux racines quarrées des charges, comptées jusqu'à l'orifice inférieur du tuyau. Les trois vîtesses réelles sont aux trois vîtesses naturelles correspondantes dans le rapport de 1 à 1,2433; mais on ne peut pas conclure si cet effet est dû à la

longueur du tuyau, ou si, dans les tuyaux additionnels verticaux, il faut compter les charges jusqu'à l'orifice inférieur. Cette incertitude aurait été ôtée, en faisant quelques expériences sur les mêmes tuyaux placés horizontalement.

245. Ce rapport de 1 à 1,2433 entre les vîtesses réelles et les vîtesses naturelles, revient à celui de 13 à 16,1629; de sorte que l'aire de la veine étant toujours égale à celle de l'orifice, la vîtesse moyenne est réellement diminuée dans le rapport de 16,1629 à 13. Les expériences ne sont pas assez multipliées pour pouvoir en déduire la loi exacte de la résistance à l'entrée du tuyau. Cette résistance d'ailleurs est si peu considérable, comparée à celle d'un tuyau un peu long, qu'on peut en négliger les variétés, et s'en tenir au rapport simple de 16 à 13 pour la diminution de vîtesse, occasionnée par la contraction à l'entrée de tous les tuyaux. Nous avons préféré ce rapport simple au premier, parce que les expériences d'après lesquelles on l'avait déduit, sont faites à une charge d'environ 12 pieds, et qu'à cette hauteur la résistance de l'air devoit un peu augmenter le rapport. D'ailleurs il est moindre, en ne comprenant pas dans la charge la longueur du tuyau additionnel : aussi avons-nous suivi ce dernier pour le calcul des vîtesses uniformes dans les tuyaux longs.

246. Quand on donne à un tuyau additionnel une longueur un peu plus grande qu'environ trois à quatre fois son diametre, il s'y forme un frottement qui commence à faire diminuer les

dépenses; mais le mouvement de l'eau n'y est pas encore réglé de la même maniere qu'il le serait à une plus grande longueur; la vîtesse de l'axe y est encore presque égale à la vîtesse naturelle; celle à la paroî est trop petite; la résistance du frottement trop faible, ainsi que nous l'avons remarqué dans un tuyau d'un pouce de diametre, qui n'avait que 2 pieds de longueur (348). Il y a donc une longueur nécessaire à l'entier établissement du régime; à cette longueur la résistance acquiert toute son énergie; le rapport convenable entre la vîtesse de l'axe et toutes les autres vîtesses des filets jusqu'à la paroî s'établit; le parallélisme du mouvement de toutes les molécules a lieu; la force accélératrice est constamment détruite par la résistance; et la vîtesse moyenne uniforme est exactement représentée par notre formule générale (55). Mais la contraction à l'entrée du tuyau est toujours la même, c'est-à-dire que la partie de la charge employée à produire la vîtesse est toujours égale au quarré de la vîtesse moyenne uniforme, divisé par un nombre qui est à $2g$ comme le quarré de 13 est à celui de 16, c'est-à-dire à $\frac{V^2}{478}$.

247. Nous n'avons point encore de connaissance exacte sur la longueur du tuyau qui est nécessaire à l'établissement du régime : il paraît seulement, d'après nos expériences, qu'elle est beaucoup plus considérable pour les gros tuyaux que pour les petits. Dans le tuyau de 3 lignes le régime était établi à moins de 3 pieds de lon-

gueur; dans le tuyau d'un pouce il l'était à 10 pieds de longueur, mais non pas à 2 pieds; dans le tuyau de 2 pouces il l'était à 30 pieds de longueur, mais non pas à 20. Ainsi, en supposant que la longueur due au régime soit de 24 pieds pour le tuyau de 2 pouces de diametre, et qu'elle varie comme le quarré des diametres, ou comme les aires de la section, on trouvera que la longueur due au régime pour le tuyau d'un pouce est d'une toise, et qu'en général cette longueur peut être égale au quarré du diametre exprimé en pouces, multiplié par le nombre abstrait 72. Pour le déterminer exactement, ainsi que les vitesses moyennes relatives à des longueurs moindres, il faudrait quantité d'expériences qui nous manquent, et qui d'ailleurs ne seraient pas très-utiles: car, si l'on ne fait pas couler l'eau par des orifices simples, ou par des tuyaux additionnels, on la conduit à des distances plus grandes, par des tuyaux dans lesquels la résistance acquiert toute son énergie.

CHAPITRE IV.

Du mouvement de l'eau qui passe par plusieurs orifices consécutifs.

248. Si l'on adapte à la face verticale d'un réservoir entretenu constamment plein, un tuyau horizontal qui soit traversé dans son intérieur par plusieurs diaphragmes perpendiculaires à son axe,

et percés chacun d'un orifice beaucoup plus petit que l'aire du tuyau; connaissant l'aire du tuyau et celles des orifices, on demande la relation qu'il y aura entre la charge entière et les vîtesses que l'eau prendra, tant dans le tuyau qu'à chaque orifice.

Pour trouver ce rapport, nous négligerons d'abord la résistance produite par le frottement contre les parois du tuyau, comme on serait autorisé à le faire, si le tuyau était fort court : ainsi nous n'examinerons que la charge capable d'imprimer les différentes vîtesses. Nous supposerons aussi que le mouvement de l'eau à travers un orifice, pour se répandre dans un tuyau plein, est le même que si elle coulait en l'air, comme l'expérience l'a confirmé.

Soient H la hauteur de la charge, A l'aire du tuyau, M, N, Q, etc. les aires de plusieurs orifices, percés dans autant de diaphragmes, V la vîtesse dans le tuyau, p le rapport de la contraction 1,6086. Pour simplifier les résultats, on transformera les aires M, N, Q, etc. en d'autres aires plus petites m, n, q, etc. qui donneraient la même dépense s'il n'y avait ni contraction ni résistance. Ainsi, par exemple, ayant d'abord divisé M par p, l'aire $\frac{M}{p}$ serait celle de la veine contractée, et la vîtesse par cette aire, pour faire même dépense que le tuyau, étant connue, on trouvera (240) la valeur de K et de $\sqrt{2g - K}$, qu'on fera égale à $\sqrt{2g'}$, et on fera $m = \frac{M\sqrt{2g'}}{p\sqrt{2g}}$, si l'orifice est mince, et $m = \frac{M\sqrt{2G}}{\sqrt{2g}}$, si c'est un tuyau

additionnel. On trouvera de même les autres aires fictives n, q, etc.

D'après ces données, si le premier orifice est placé à l'entrée du tuyau, la vîtesse que l'eau y prendra étant en raison inverse des aires sera exprimée par $\frac{AV}{m}$, et sa hauteur due par $\frac{A^2V^2}{2gm^2}$, parce que l'eau étant censée stagnante dans le réservoir, passe du repos à la vîtesse $\frac{AV}{m}$. Après ce passage la vîtesse se réduit dans le tuyau à V jusqu'au second orifice, où elle doit devenir $\frac{AV}{n}$, ce qui exige encore une charge de $\frac{A^2V^2}{2gn^2}$; mais la vîtesse V conservée produit sur ce deuxieme orifice l'effet d'une charge égale $\frac{V^2}{2g}$: ainsi il n'est plus besoin, pour produire la nouvelle vîtesse, que d'une charge égale à $\frac{A^2V^2}{2gn^2} - \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{n^2} - 1\right)$. On démontrerait de même que le troisieme orifice, et chacun des autres, occasionne une augmentation semblable, et égale à $\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{q^2} - 1\right)$. Ainsi, la charge totale pour trois orifices, ou $H = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2} + \frac{A^2}{n^2} + \frac{A^2}{q^2} - 2\right)$, formule générale, qui se prête à plusieurs combinaisons propres à répondre à toutes les questions qu'on peut se proposer sur les rétrécissements dans les tuyaux.

249. Au lieu de rapporter la charge à la vîtesse qui a lieu dans le tuyau, on peut soumettre la

formule à toute autre vîtesse, comme, par exemple, à celle du dernier orifice, que nous désignerons par v : dans ce cas, on a $V = \frac{qv}{A}$, et par conséquent $H = \frac{q^2v^2}{2gA^2}\left(\frac{A^2}{m^2} + \frac{A^2}{n^2} + \frac{A^2}{q^2} - 2\right)$; mais qv exprime la dépense de cet orifice, et conséquemment celle du tuyau, qu'on peut nommer D. On aura donc $H = \frac{D^2}{2gA^2}\left(\frac{A^2}{m^2} + \frac{A^2}{n^2} + q^2 - 2\right) = \frac{D^2(A^2m^2n^2 + A^2m^2q^2 + A^2n^2q^2 - 2m^2n^2q^2)}{2gA^2m^2n^2q^2}$, valeur de la charge, quand la dépense est donnée. Si l'aire du tuyau était très-grande en comparaison de celle des orifices, et qu'ainsi la vîtesse y fût presque nulle, on pourrait négliger les dernieres unités; et l'équation se réduirait à $H = \frac{D^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{q^2}\right) = \frac{D^2(m^2n^2 + m^2q^2 + n^2q^2)}{2gm^2n^2q^2}$. Ce cas se rapporte à celui d'un vase un peu grand, traversé et séparé par plusieurs diaphragmes horizontaux ou verticaux percés chacun d'une petite ouverture. La hauteur H exprime ici celle de la charge au-dessus du centre de l'orifice inférieur.

Soit x la hauteur due à la vîtesse, à un orifice quelconque; on voit aisément que $\frac{D^2}{2gq^2}$ exprime cette hauteur pour le troisieme orifice. Ainsi l'équation générale se change en celle-ci : $H = \frac{x(A^2m^2n^2 + A^2m^2q^2 + A^2n^2q^2 - 2m^2n^2q^2)}{A^2m^2n^2}$, qui se réduit à $H = \frac{x(m^2n^2 + m^2q^2 + n^2q^2)}{m^2n^2}$, quand l'eau est censée stagnante dans le vase, et si les orifices sont égaux,

on a $H = 3x$, c'est-à-dire que la charge due à la vîtesse, à un orifice, est égale à la charge totale, divisée par le nombre des orifices.

250. On peut remarquer que la distance qui se trouve entre les orifices n'influe pas sur les différentes valeurs que nous venons de trouver, pourvu cependant, ainsi que nous l'avons supposé, qu'ils soient assez distants pour que, dans l'intervalle, la vîtesse puisse diminuer en raison inverse des sections : car si on ne laissait que de très-petits intervalles entre des orifices égaux, situés sur un même axe, le mouvement y aurait lieu à-peu-près comme dans un tuyau de même diametre que les orifices. Les équations précédentes ne seraient donc plus applicables à ce mouvement, à moins qu'on ne tînt compte du changement d'hypothese.

Il peut arriver néanmoins que la distance entre les orifices altere l'ordre du mouvement, sans changer la dépense. Imaginons un vase vertical plein d'eau, et traversé par différents diaphragmes horizontaux, percés de petits orifices égaux, et que la dépense se fasse librement dans l'aire par l'orifice inférieur; si la distance entre les deux diaphragmes inférieurs excede la hauteur due à la vîtesse au dernier orifice, comme il ne peut dépenser que ce que les autres orifices lui fournissent, il s'établira à ce dernier un courant d'air contraire à celui de la veine d'eau; qui ira occuper la partie supérieure de l'intervalle qui se trouve entre les deux derniers diaphragmes; l'eau s'abaissera dans cet espace, jusqu'à ce qu'il ne reste

qu'une charge suffisante à la dépense des orifices supérieurs. Le même effet peut avoir lieu dans les autres intervalles, si l'orifice supérieur tend à fournir la moindre dépense : alors la hauteur H n'est point égale à la hauteur entiere du réservoir, mais plus généralement à la somme des hauteurs de l'eau dans chaque intervalle.

Cependant si l'eau passe avec beaucoup de vîtesse à un orifice de quelques lignes seulement de diametre, le courant d'air contraire ne peut pas s'établir; l'eau reste continue dans le vase; et le mouvement a lieu suivant le résultat de la formule précédente; une partie de l'eau contenue dans l'intervalle inférieur est soutenue par la pression inférieure de l'air, ce qui augmente d'autant la pression supérieure; et cet effort se distribue sur tous les orifices, proportionnellement à leurs aires, ou également, s'ils sont égaux. Dans ce cas, la vîtesse par l'orifice inférieur n'est pas due à toute la hauteur de l'eau contenue dans le dernier intervalle. Nous aurons occasion de remarquer cet effet dans une expérience. (*Voy.* le § 275e.)

251. La formule $H = \frac{x(m^2n^2 + m^2q^2 + n^2q^2)}{m^2n^2}$, dans laquelle x exprime la hauteur due à la vîtesse au dernier orifice, et qui est relative au vase dans lequel l'eau est stagnante, se rapporte encore à un tuyau dans lequel la vîtesse est sensible par rapport à celle des orifices, lorsque chaque orifice est disposé parallèlement à la direction antérieure du courant, et que les filets ne peuvent s'y intro-

duire sans se détourner en changeant de direction. Imaginons, par exemple, plusieurs bouts de tuyau assemblés perpendiculairement l'un à l'autre, et que l'eau ne puisse passer de l'un dans l'autre que par un orifice parallele à l'axe de celui qu'elle vient de parcourir; la vîtesse des filets dans un des tuyaux étant parallele à son axe, ne peut pas influer sur la vîtesse à l'orifice suivant, qui est percé dans une direction perpendiculaire. Ainsi la charge entiere doit être sensiblement composée de la somme des hauteurs dues aux vîtesses de chaque orifice, comme si la vîtesse dans le tuyau était nulle. Ce résultat est d'autant plus vrai, que l'orifice est plus petit, relativement à l'aire du tuyau; et quand nous n'aurons à examiner que des cas semblables, nous pouvons déja déduire cette conclusion, que la partie de la charge employée à imprimer la vîtesse dans un tuyau, n'exerce son effort que parallèlement à l'axe, et n'agit point du tout perpendiculairement à la paroi, tant que la vîtesse qu'elle imprime subsiste; mais si parmi plusieurs orifices, les uns étaient disposés parallèlement, et les autres perpendiculairement au courant, il faudrait combiner les deux formules, et tenir compte de la variété de ces divers mouvements.

252. Pour résumer et simplifier les principes précédents, et les rendre applicables aux problêmes que nous avons en vue, nous supposerons que l'entrée du tuyau est entièrement ouverte, qu'il n'y a qu'un seul orifice, et que la vîtesse dans le tuyau est sensible par rapport à celle de l'orifice.

D'après ces données on peut déterminer la valeur de x, ou de la hauteur due à la vîtesse de l'orifice dans quatre cas différents. 1° Quand l'orifice étant perpendiculaire à l'axe du tuyau, il est percé dans une mince paroi. 2° Quand, étant placé de même, il est dans un tuyau additionnel. 3° Quand l'orifice est parallele à l'axe du tuyau, ou pratiqué dans sa paroi, supposée mince. 4° Quand on adapte à cette paroi un tuyau additionnel. Dans ces deux derniers cas, on suppose que l'extrémité du tuyau est bouchée, et que toute la dépense se fait par l'orifice.

Pour les deux premiers cas reprenons la formule $H = \frac{x(A^2m^2n^2 + A^2m^2q^2 + A^2n^2q^2 - m^2n^2q^2)}{A^2m^2n^2}$, relative au dernier orifice perpendiculaire à l'axe. Puisqu'il n'y a plus qu'un seul orifice, il n'y a qu'à rendre le second égal à A. D'après ce que nous avons dit ci-devant (248), on a $n^2 = \frac{2g'A^2}{2gp^2}$; mais comme alors l'eau n'éprouve ni contraction ni frottement, pour passer à travers un orifice aussi large que le tuyau même, on a $p = 1$, $2g' = 2g$, et $n^2 = A^2$. Ainsi la formule se réduit à $H = \frac{x(A^2m^2 + A^2q^2 - 2m^2q^2)}{A^2m^2}$. D'un autre côté, l'entrée du tuyau étant ouverte, le premier orifice devient encore égal à A, et on a $m^2 = \frac{A^2 2G}{2g}$; ce qui réduit encore la formule à $H = \frac{x\left(\frac{2G}{2g}A^2 + q^2 - \frac{2Gq^2}{2g}\right)}{\frac{2G}{2g}A^2}$, ou $x = \frac{\frac{2G}{2g}A^2H}{\frac{2G}{2g}A^2 + q^2 - \frac{2G}{2g}q^2}$. Soit nommée a l'aire entiere de l'orifice : si cet orifice

est mince, on aura $q^2 = \frac{2g'}{2g}\frac{a^2}{p^2}$; et si c'est un tuyau additionnel, on aura $q^2 = \frac{2G}{2g}a^2$. Ainsi la formule (A), pour l'orifice mince perpendiculaire à l'axe, devient $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(\frac{2g'}{2G} - \frac{2g'}{2g}\right)\frac{a^2}{p^2}}$; et celle (B) pour le tuyau additionnel est $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2}$.

Pour les deux autres cas, il faut faire les mêmes réductions à la formule précédente $H = \frac{x(m^2n^2 + m^2q^2 + n^2q^2)}{m^2n^2}$, qui est relative aux orifices paralleles à l'axe, ou percés dans la paroi du tuyau : on trouvera de même la formule (C) pour l'orifice mince, $x = \frac{A^2H}{A^2 + \frac{2g'a^2}{2Gp^2}}$, et la formule (D) pour le tuyau additionnel, $x = \frac{A^2H}{A^2 + a^2}$.

Quand l'aire a est très-petite, en comparaison de A, les quatre formules (A), (B), (C), (D), se réduisent à donner sensiblement $x = H$.

Si dans les deux premières formules (A) et (B) on suppose $a = A$, il faudra observer, comme nous l'avons fait ci-devant, qu'il n'y a alors ni contraction, ni frottement au passage du tuyau à l'orifice; et le rapport des vîtesses à l'orifice et dans le tuyau, que nous avions exprimé par $\frac{A}{\sqrt{\frac{2g'}{2g}}\frac{a}{p}}$, pour l'orifice mince (248), se réduit à $\frac{A}{a}$. Ainsi, pour remplir

cette condition dans l'équation (A), il faut diviser a par la quantité $\sqrt{\frac{2g'}{2g}\cdot\frac{1}{p}}$, ou multiplier a^2 par $\frac{2g}{2g}p^2$: faisant ensuite $A=a$, la formule donne $x=\frac{2G}{2g}H$.

Si dans la formule (B), relative au tuyau additionnel, on divise a^2 par $\frac{2G}{2g}$, et qu'on fasse $a=A$, elle se réduit de même à $x=\frac{2G}{2g}H$. Dans tous les cas, il faut bien remarquer que x exprime la hauteur de charge suffisante pour produire la même vîtesse et la même dépense qui auraient lieu si l'orifice était isolé et adapté immédiatement à un réservoir, où il éprouverait même contraction et même frottement qu'à l'endroit où il est placé. Nous allons examiner dans le chapitre suivant, comment le frottement et la pression contre les parois du tuyau, que nous avons négligés ici, influent sur la vîtesse de l'eau à l'orifice.

CHAPITRE V.

De la pression que l'eau exerce sur les parois des différents lits dans lesquels elle coule.

253. QUAND l'eau coule dans un tuyau uniformément incliné, avec une charge à la tête, capable d'imprimer la vîtesse moyenne qui convient à sa pente et à son diametre, elle n'exerce

aucune pression contre le point de la paroi situé au sommet de son diametre vertical; et cette pression, pour les autres points de la paroi, n'est due qu'à la hauteur de la partie supérieure du diametre. La raison en est que, la force accélératrice et la résistance se détruisant mutuellement, le mouvement et la direction imprimés dès l'entrée du tuyau ne peuvent tendre à changer. Cette vérité est d'ailleurs prouvée par l'expérience. Si on retranche de ce tuyau toute la partie sémi-cylindrique située au-dessus de l'axe, en donnant à l'orifice de la prise d'eau la figure du demi-cercle inférieur, et la même charge sur le centre d'impulsion, il est évident que la dépense diminuera de moitié, par la diminution de la section; mais le rayon moyen, la pente, et la vîtesse moyenne demeureront constantes; et le demi-cylindre d'eau aura le même mouvement qu'il avait précédemment, lorsqu'il était chargé de son autre moitié, sans que sa section tende à s'élever. Il en est de même du mouvement dans les canaux et dans les rivieres; la pression de chaque point est due à sa profondeur sous la superficie de l'eau; mais la hauteur due à la résistance du lit est relative à la pente et à la section transversale de la riviere.

De même, si l'eau pouvait se mouvoir dans un tuyau horizontal, sans y éprouver de résistance, elle y prendrait une vîtesse due à la charge entiere, sans qu'il en résultât de pression contre les parois, du moins dans la partie supérieure

du tuyau; mais l'effet du frottement est exactement semblable à celui d'un rétrécissement au bout du tuyau : l'un et l'autre ralentissent la vîtesse; et la partie de la charge qui n'est pas employée à l'imprimer, fait effort dans tous les sens, et forme une pression contre les parois, qui devient d'autant plus considérable, que la vîtesse est plus ralentie par la résistance; tellement que si la vîtesse devient comme nulle, la pression est due à toute la hauteur de la charge.

Il faut donc bien se garder de confondre la pression avec la résistance du frottement : celui-ci est toujours proportionnel, ou du moins relatif à la vîtesse, et est exprimé, par une surface déterminée S, par $\frac{Sr}{s}$, comme nous l'avons vu (74), tandis que la pression, du moins dans un tuyau horizontal, est égale au poids d'une colonne qui aurait pour hauteur celle du réservoir, moins celle qui est due à la vîtesse. Ainsi le frottement à un point quelconque de la paroi, diminue d'autant plus que la vîtesse devient moindre, et la pression contre ce même point augmente d'autant plus, au contraire, que la vîtesse diminue.

En général, la hauteur due à la pression contre un point de la paroi est égale à la hauteur due à la vîtesse qui aurait lieu à l'origine du tuyau, s'il n'occasionnait aucune résistance, moins la hauteur due à la vîtesse réelle. Cette regle est générale, à quelques modifications près, relatives à la figure du tuyau.

Dans le tuyau incliné BC, la pression contre un point S est représentée par la hauteur AB, moins la hauteur due à la vîtesse dans le tuyau, et si cette derniere hauteur est égale à la premiere, la pression en S est nulle. Fig. 25.

Dans le tuyau HIKL, où le centre de la gueule-bée est au-dessous de celui de la prise d'eau, en tirant la droite HL, la pression au point I sera égale à AH — IO, moins encore la hauteur due à la vîtesse; et celle au point K sera égale à AH + PK, moins la hauteur due à la vîtesse. Dans le tuyau DEFG, où la gueule-bée est plus élevée que la prise d'eau, en tirant l'horizontale GR, la pression au point E est égale à AR — EM, moins encore la hauteur due à la vîtesse dans le tuyau; et celle au point F sera égale à AR + FN, moins la hauteur due à la même vîtesse.

Quelque charge et quelque figure qu'on puisse donner à un tuyau, la pression qu'un point quelconque éprouve rentre dans la regle générale. Cette connaissance est relative à deux objets importants : le premier, est de déterminer la force qu'on doit donner à un tuyau, pour résister à la pression qu'on veut lui faire éprouver; et dans cette vue on doit toujours supposer la vîtesse nulle. Plusieurs auteurs ont donné à ce sujet tout ce que l'expérience peut indiquer, eu égard aux différentes matieres propres à faire des conduites. Le second, dont nous traiterons en particulier, est de déterminer les écoulements par des ouvertures latérales, dont la force motrice est la pression.

Nous en déduirons naturellement la théorie des jets d'eau.

254. Pour juger de l'intensité de la pression, il paraît qu'il n'est rien de plus simple que de mesurer l'écoulement par une ouverture faite à la paroi; aussi M. l'abbé Bossut s'est-il servi de ce moyen. Un tuyau horizontal de 16 lignes de diametre, qui avait servi aux autres expériences, a été percé d'une petite ouverture latérale, dont on a mesuré la dépense, le bout du tuyau étant d'abord fermé, et ensuite ouvert, avec des charges et des longueurs différentes; le diametre de l'orifice n'est pas parfaitement connu, quoiqu'il soit estimé d'environ 3 lignes $\frac{1}{4}$; mais on a vu par expérience, que quand le tuyau était bouché, cet orifice, qui était placé sensiblement au niveau de l'axe du tuyau, donnait 196 pouces cubes par minute, sous la charge totale de 12 pouces, et 274 pouces sous celle de 24 pouces. En désignant toujours par x les hauteurs dues aux vîtesses à l'orifice dans chaque cas, les dépenses sont proportionnelles à $\sqrt{x}\sqrt{2g-K}$. Mais comme, sous la même charge totale, les vîtesses varient très-peu, on peut considérer K comme constant, et les dépenses comme proportionnelles à $\sqrt{x}$; les valeurs de x sont, dans tous les cas, égales à la charge entière H, moins celle qui imprime la vîtesse dans le tuyau. Or, lorsque le tuyau est ouvert, cette différence n'est autre chose que la hauteur due à la résistance ou à la pression, qu'il est toujours facile de calculer, d'après la formule du mouvement uniforme. Quand,

au contraire, ce tuyau est bouché, ce cas se rapporte exactement à celui de la formule (C), dans laquelle $x = \frac{A^2 H}{A^2 + \frac{2g}{2G} \cdot \frac{a^2}{p^2}}$; mais dans cette expérience, la valeur de $\frac{2g}{2G} \cdot \frac{a^2}{p^2}$ est si petite relativement à celle de A^2, qu'elle n'influe que de quelques dixiemes de pouce sur la valeur des dépenses; et, comme M. l'abbé Bossut a négligé les décimales, nous pouvons de même négliger cette petite quantité, et supposer $x = H$, quand le tuyau est bouché. Si, dans ce cas, nous représentons par D la dépense connue de l'orifice, et par d sa dépense, quand le tuyau est ouvert, on aura la proportion $\sqrt{H} : \sqrt{x} :: D : d = D\sqrt{\frac{x}{H}}$.

255. Pour connaître donc les dépenses que devait faire, suivant la théorie, l'orifice percé dans la paroi du tuyau, lorsque son extrémité était ouverte, et les comparer avec celles de l'expérience, il faut d'abord calculer, comme nous l'avons fait, les vîtesses des tuyaux ouverts, relativement à leur charge, à leur diametre et à leur longueur (ces vîtesses sont rapportées dans le tableau comparatif (55), aux expériences marquées de numéros semblables à ceux de la deuxieme colonne du tableau suivant); retrancher ensuite la hauteur due à cette vîtesse avec contraction, de la hauteur entiere de la charge H; le reste, désigné par x, sera la charge relative à la dépense cherchée.

Numéros du tableau (35)	Longueur des tuyaux exprimée en pouces.	Hauteurs dues aux vitesses calculées.	Valeurs de *x*.	Dépenses de l'orifice latéral calculées.	Dépenses de l'orifice latéral, suiv. l'exp.
Hauteur du réservoir : 12 pouces.					
	po.	po.	po.	po. c.	po. c.
1	61	360	2,2920	9,7080	176,3	171
2	64	720	1,1406	10,8594	186,45	186
3	67	1080	0,7354	11,2646	189,9	190
4	68	1440	0,5351	11,4649	191,6	191
5	69	1800	0,4171	11,5849	192,6	193
6	70	2160	0,3400	11,6600	193,1	194
Hauteur du réservoir : 24 pouces.					
7	59	360	5,1302	18,8698	243,7	240
8	60	720	2,5820	21,4180	258,8	256
9	62	1080	1,6648	22,3352	264,3	261
10	63	1440	1,2080	22,7920	267,0	264
11	65	1800	0,9388	23,0612	268,6	265
12	66	2160	0,7632	23,2368	269,6	266

256. Nos dépenses calculées sont sensiblement égales à celles que M. l'abbé Bossut a calculées par une autre méthode : il n'y a de différence qu'en ce qu'il a déduit les vitesses dans le tuyau, des dépenses d'expérience, au lieu que nous les avons calculées immédiatement par la formule du mouvement uniforme.

La comparaison des deux dernières colonnes du tableau précédent présente quelques irrégularités, qui peuvent provenir des erreurs inévitables dans l'expérience, et de l'omission des décimales. On voit, par exemple, qu'entre la troisième et la quatrième dépense, il doit y avoir plus d'un pouce de différence, et qu'il ne peut y en avoir deux entre la quatrième et la cinquième : voilà des erreurs visibles. Mais on ne peut attribuer à la

même cause les différences qui se remarquent à la premiere, septieme, huitieme, etc.

257. Le principe, déja établi, que l'ouverture éprouvait une pression due à la charge x, égale à la différence entre la charge entiere et celle qui était due à la vîtesse dans le tuyau, est évident; ce n'est que l'application qui est fausse. Si on avait adapté à l'ouverture latérale un petit tuyau recourbé verticalement, l'eau y serait montée, et s'y serait soutenue à la hauteur de x, de sorte que la différence entre la hauteur du réservoir et celle de l'eau dans le petit tuyau, eût été égale à $H - x$, ou à la hauteur due à la vîtesse dans le gros tuyau, et le mouvement s'y serait continué, comme s'il n'y eût point eu d'ouverture. Cet effet est indubitable; et il aurait également lieu, quel que fût le diametre de l'ouverture, et en quelque lieu qu'elle fût placée; mais en ne faisant au gros tuyau qu'une simple ouverture qui fournisse une dépense, le régime du mouvement est altéré, et le rapport entre les dépenses D et d, dépend non-seulement de la pression, mais encore de la grandeur de l'ouverture, et de la distance où elle est du réservoir.

258. Il y a lieu de croire que l'ouverture avait été faite près de l'origine du tuyau horizontal, quoique M. l'abbé Bossut ne le dise pas expressément; et il s'agit d'examiner l'altération qu'elle devait produire dans la vîtesse du tuyau. Si la dépense du réservoir eût été la même, lorsque l'ouverture était ouverte, que quand elle était

bouchée, la vîtesse du tuyau, en dessous de l'ouverture, se trouvant diminuée par la dépense qu'elle faisait avec la charge x, le frottement l'aurait été aussi sur la longueur du tuyau : alors la différence entre x et la charge employée à vaincre le frottement, dans le second cas, eût été une partie inutile de la charge entiere, ce qui est impossible : car toute force produit un effet apparent, ou est détruite par une réaction. L'effet de la charge est de produire la plus grande dépense, eu égard aux obstacles; ainsi la dépense du réservoir était un peu augmentée par l'ouverture. Une plus grande partie de la charge était donc employée à produire une plus grande vîtesse à l'origine du tuyau; et le reste, moindre que x, produisait la pression contre la paroi : cette hauteur était égale à celle due au frottement résultant de la vîtesse au-delà de l'ouverture; et cette vîtesse, diminuée par la dépense déja faite, était moindre que celle de l'origine, et même que la vîtesse uniforme du tuyau sans ouverture. Cette combinaison se développera mieux en l'exprimant par une équation.

259. En conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, supposons que $H-x$ soit la hauteur due à la vîtesse à l'origine du tuyau, dont l'effet n'a lieu qu'horizontalement; la charge x sera la seule qui agisse sur la paroi, et qui tende à imprimer la vîtesse de l'ouverture, en même temps qu'elle doit vaincre la résistance qui résulte du frottement au-delà de l'ouverture. Si l'ouverture

n'existait pas, et en représentant 478 par 2G, et la section du tuyau par A, la dépense à l'origine du tuyau serait exprimée par $A\sqrt{2G}\sqrt{H-x}$; et si l'ouverture n'influait pas sur la valeur de x, sa dépense (254) serait égale à $D\sqrt{\frac{x}{H}}$. Mais nous avons vu dans l'instant que x doit diminuer, et on sait que les résistances sont sensiblement comme les quarrés des vîtesses, quand celles-ci ne different pas beaucoup entre elles. Ainsi, en nommant h la hauteur due à la résistance du tuyau sans ouverture, tandis que x représente celle du même tuyau avec l'ouverture, on pourra faire la proportion $h : H-h :: x : \frac{x(H-h)}{h}$; quatrieme terme, qui exprime la hauteur due à la vîtesse sur la longueur du tuyau; $\sqrt{2G}\sqrt{\frac{x(H-h)}{h}}$ sera cette vîtesse même; et $A\sqrt{2G}\sqrt{\frac{x(H-h)}{h}}$ sera la dépense au-delà de l'ouverture. Si à cette dépense on ajoute celle de l'ouverture, la somme doit être égale à celle du réservoir. Ainsi on a l'équation $A\sqrt{2G}\sqrt{H-x} = D\sqrt{\frac{x}{H}} + A\sqrt{2G}\sqrt{\frac{x(H-h)}{h}}$; d'où l'on tire $x = \frac{2GHA^2}{\left(A\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(H-h)}{h}} + \frac{D}{\sqrt{H}}\right)^2 + 2GA^2}$. Cette valeur de x, substituée dans l'équation $d = D\sqrt{\frac{x}{H}}$, donnera les dépenses cherchées, qui différeront d'autant plus des dépenses calculées dans le tableau précédent (255), que la vîtesse dans le tuyau sera plus

grande. Si on supposait l'ouverture nulle, alors D=o, et on aurait $x=h$; c'est-à-dire que, dans ce cas, la hauteur due à la pression serait égale à h, ce qui est évident.

260. Nous avons calculé les dépenses de l'ouverture, d'après la théorie précédente, pour les trois premières expériences, qui répondent à chaque charge, parce que l'effet de la rectification que nous venons d'indiquer y est le plus sensible. La première colonne du tableau suivant indique les vîtesses sans ouverture au tuyau, calculées (55) par le moyen de la formule du mouvement uniforme; les deux suivantes sont les vîtesses à l'entrée du tuyau, et au-delà de l'ouverture; la quatrieme, les hauteurs dues à la pression, quand l'eau coule par l'ouverture; et les deux dernieres servent à la comparaison entre les dépenses de l'ouverture, suivant cette théorie et suivant l'expérience.

	Vitesses sans ouverture.	Vitesses à l'origine du tuyau.	Vitesses au-delà de l'ouverture.	Valeurs de x.	Dépenses de l'ouverture, selon la théorie.	Dépenses de l'ouverture, selon l'expérience.
	Charges ou hauteurs du réservoir: 12 pouces.					
e.	po.	po.	po.	po.	po.	po.
1	33,106	34,67	32,68	9,4706	174,12	171
2	23,345	25,33	23,03	10,6576	184,72	186
3	18,794	20,85	18,60	11,0903	188,43	190
	Charges ou hauteurs du réservoir: 24 pouces.					
7	49,518	51,74	48,89	18,3996	240,00	240
8	35,130	37,83	34,79	21,0068	256,34	256
9	28,211	31,08	27,98	21,9783	262,10	261

261. Les différences qu'on remarque dans ces nouveaux résultats, tantôt en plus, tantôt en moins, peuvent bien provenir des défauts inévitables qui peuvent s'être glissés dans la mesure des dépenses, comme il est aisé de le reconnaître. En considérant la marche des dépenses de l'ouverture, on voit que les première et seconde doivent être sensiblement dans le même rapport que les septieme et huitieme; ou bien que la différence entre les deux premieres, doit être à la différence entre les deux dernières, comme deux dépenses correspondantes. Or, les dépenses première et septieme sont à-peu-près comme 5 est à 7. Ainsi la différence entre les dépenses septieme et huitieme étant de 16 pouces cubes, celle entre les dépenses premiere et seconde devrait être moindre que 11 pouces, comme la théorie l'indique, tandis qu'on l'a trouvée de 15 pouces : d'où l'on peut conclure que la premiere est trop faible, et la seconde trop forte.

262. Nous avons supposé que l'ouverture était assez près de la prise d'eau, pour ne pas tenir compte de l'intervalle; mais si elle était placée au tiers, par exemple, de la longueur du tuyau, le problême deviendrait un peu plus compliqué; la charge x se diviserait en deux parties, dont l'une serait employée à vaincre la résistance sur le premier tiers; et l'autre ferait équilibre à la résistance des deux autres tiers, avec une vitesse diminuée par la dépense de l'ouverture; la hauteur due à la pression ou à la vitesse de l'ouverture

serait toujours représentée par la quantité totale x, qui serait d'autant plus grande que l'ouverture serait plus éloignée de la prise d'eau.

En effet, si l'ouverture était placée à l'extrémité du tuyau, l'eau ne pourrait avoir sur toute la longueur une plus grande vîtesse que celle qui convient au mouvement uniforme : car elle produirait une résistance que la charge ne serait pas capable de vaincre. Ainsi on aurait alors exactement $x = h$; et les dépenses de l'ouverture seraient égales à celles que nous avons calculées dans le premier tableau (255).

Tout ce que nous venons de dire du tuyau horizontal n'a lieu que pour des ouvertures très-petites en comparaison de l'aire du tuyau; mais si une ouverture, percée au-dessus du tuyau, dépensait beaucoup, et que la vîtesse au-delà de l'ouverture fût trop petite pour que le tuyau coulât plein, alors l'ouverture ne pourrait pas continuer la même dépense, tandis que l'eau s'abaisserait au-delà : il faudrait nécessairement que la dépense de l'ouverture fût assez diminuée, pour que le tuyau continuât à couler plein, à moins que l'ouverture ne fût située en dessous. Ainsi la vîtesse d'un long tuyau horizontal n'étant pas plus grande qu'il ne faut pour que l'eau occupe toute sa capacité, si on y pratique une ouverture supérieure, elle ne donnera aucune dépense; ce qui n'empêcherait pas que l'eau ne se soutînt dans un petit tuyau vertical adapté à cette ouverture, et rempli d'eau par le haut, jusqu'à la hauteur du réservoir,

moins celle qui serait due à la vîtesse de l'eau dans le tuyau; parce que ce tuyau vertical ne ferait aucune dépense. Il est donc des cas où on ne peut pas juger de la pression d'un tuyau par la dépense que fait une ouverture latérale. Ce moyen est donc imparfait et sujet à des modifications, tandis que la pression contre un point quelconque, exprimée par la hauteur à laquelle l'eau peut se soutenir dans un tuyau vertical adapté à une ouverture, est toujours déterminée par la charge du tuyau et la vîtesse que l'eau y prend.

263. L'inexactitude de la méthode des dépenses des ouvertures, pour juger de l'intensité de la pression, devient beaucoup plus sensible en considérant ce qui arriverait dans un tuyau incliné. Supposons qu'il eût à sa tête une charge plus grande que celle qui est due à sa vîtesse, et qu'on y fît une ouverture supérieure assez considérable pour diminuer la dépense en dessous de l'ouverture, et y rendre la vîtesse relative à la pente uniforme du tuyau, alors on aurait beau augmenter l'ouverture, elle ne donnerait pas une plus grande dépense; la vîtesse de l'eau qui en sortirait diminuerait à mesure qu'on augmenterait l'aire de l'ouverture; et on verrait que cette aire a ses limites, pour que la vîtesse de l'eau qui en sort soit due à toute la hauteur de la pression, tellement qu'elle doit être d'autant plus petite, que la pente du tuyau approche davantage de celle qui est relative à l'uniformité du mouvement.

On pourrait demander contre quoi s'exerce l'ef-

fort de la pression, lorsque l'ouverture donne une dépense nulle, ou moindre que celle qui est due à la hauteur de la pression. Pour s'en faire une idée, il faut remarquer que si l'eau sortait par une grande ouverture, avec toute la vîtesse due à la pression, il faudrait qu'il se fît un vide au-dessous de l'ouverture, et que le tuyau ne coulât pas plein, ou diminuât sa vîtesse, ce qui ne peut arriver sans que l'air ne tende à entrer par l'ouverture : or, cette tendance de l'air à s'introduire dans le tuyau produit une pression sur l'ouverture, qui détruit en tout ou en partie la pression contraire du tuyau. Nous aurons occasion de montrer que ce fait est vérifié par l'expérience.

264. Nous n'insisterons pas davantage sur ces sortes d'écoulements, peu usités dans la pratique. Il suffit d'avoir établi la regle générale, que la pression latérale qu'éprouvent les parois d'un tuyau horizontal est due à la charge entiere, moins la hauteur due à la vîtesse qui a lieu à la prise d'eau, soit que cette vîtesse continue uniformément jusqu'au bout du tuyau, soit qu'elle diminue dans la longueur par des écoulements latéraux : car, dans ce dernier cas, la pression n'est moindre que celle du premier, que parce que la vîtesse à l'origine du tuyau est plus grande. Nous allons plus particulièrement considérer les écoulements latéraux et directs qui se font par un tuyau fermé, et qui servent à former les jets d'eau.

CHAPITRE VI.

Des jets d'eau.

265. QUAND on adapte à un réservoir constamment plein un tuyau de conduite, dont l'extrémité est fermée, si dans sa paroi supérieure, qu'on suppose horizontale, on perce une petite ouverture, ou qu'on y applique un ajutage vertical, il s'y formera un jet vertical d'une certaine hauteur, dont la vîtesse au passage de l'orifice sera due à une charge que nous désignerons par x. Nous avons vu dans les chapitres précédents, qu'indépendamment de la résistance des parois du tuyau, la pression qui a lieu contre les parois est toujours égale à la charge entiere, moins la partie employée à imprimer la vîtesse dans le tuyau : or, cette pression n'étant autre chose que la force motrice du jet, on peut la considérer comme si le tuyau ne produisait aucun frottement, et, d'après les mêmes données, se servir des formules (C) et (D) (252), qui donnent $x = \frac{A^2 H}{A^2 + \frac{2g' a^2}{2G p^2}}$, lorsque l'ajutage n'est qu'un orifice mince, ou $x = \frac{A^2 H}{A^2 + a^2}$, si c'est un tuyau additionnel. Plus l'ajutage sera éloigné du réservoir, plus la partie de la charge employée à vaincre le frottement dans le tuyau sera considérable; mais, comme elle n'est jamais perdue

pour la force du jet, on peut conclure qu'un tuyau de conduite fournira toujours le même jet, à quelque distance du réservoir que l'ajutage soit placé, pourvu qu'il soit percé dans la paroi de la conduite.

266. Quand l'eau éprouve une résistance considérable sur la longueur du tuyau, le diametre de l'orifice du jet a ses limites, pour pouvoir donner la plus grande dépense. Supposons en effet qu'après avoir fermé l'orifice, on ouvre le bout du tuyau; si on cherche alors la dépense qui convient au tuyau, à cette longueur, ce sera la plus grande qu'il puisse faire, relativement à sa charge; et la dépense du jet ne peut, dans aucun cas, l'excéder. Ainsi, en supposant que le jet doive se faire par un tuyau additionnel, et que $H - h$ soit la hauteur due à la vitesse dans le tuyau ouvert, on aura $A\sqrt{2G}\sqrt{H-h} = a\sqrt{2G}\sqrt{x} = a\sqrt{2G}\sqrt{h}$; et $a = A\sqrt{\frac{H-h}{h}}$. Si l'aire a de l'orifice était plus grande, le tuyau ne pourrait pas fournir à sa dépense sous la hauteur h; et alors on aurait $a\sqrt{2G}\sqrt{x} = A\sqrt{2G}\sqrt{H-h}$; et $x = \frac{A^2}{a^2}(H - h)$. Ainsi, quand on aura $a > A\sqrt{\frac{H-h}{h}}$, le jet donnera toujours la même dépense $A\sqrt{2G}\sqrt{H-h}$, qui sera la plus grande possible; mais pour qu'elle soit due à la plus grande hauteur, et que le jet s'éleve le plus qu'il est possible, relativement à cette dépense, il faut qu'on

ait $a = A\sqrt{\frac{H-h}{h}}$. Depuis ce terme si a diminue, la dépense du jet sera moindre; mais sa vîtesse sera due à une plus grande hauteur; de sorte que, pour un orifice extrêmement petit, la charge du jet serait sensiblement égale à H.

267. Si l'ajutage n'était qu'un orifice mince, on voit de même qu'afin que le jet s'élève le plus qu'il est possible, relativement à sa plus grande dépense, il faut que l'on ait $a = pA\sqrt{\frac{2G}{2g'}}\sqrt{\frac{H+h}{h}}$.

On doit observer que si le tuyau était incliné, et qu'il eût à la tête une charge moindre que la hauteur due à la vîtesse relative à sa pente, la hauteur due à la plus grande vîtesse dans le tuyau ne serait point $H-h$, mais seulement la charge à la tête, ce qui rendrait a plus petit. Cette remarque doit s'appliquer également au cas précédent, où nous avons supposé qu'on se servait d'un tuyau additionnel.

268. Imaginons à-présent que l'extrémité inférieure du tuyau de conduite soit courbée pour prendre la situation verticale, de maniere que les filets d'eau soient devenus bien paralleles et verticaux, avant de passer par l'ajutage, que nous supposerons percé dans la platine horizontale qui ferme la conduite, le jet qui y sera produit sera assujetti à d'autres lois que les précédentes. Si la paroi ne produisait aucune résistance, les formules (A) et (B) donneraient les valeurs de la charge x, employée à produire le jet; mais la partie qui fait

équilibre au frottement du tuyau, n'agissant que perpendiculairement à l'axe, elle ne fait aucun effort contre la veine qui forme le jet : en retranchant donc cette partie de la charge entiere, le reste pourra être considéré comme une charge relative à un tuyau sans frottement, et conviendra alors aux formules (A) et (B).

Il est donc question de déterminer l'effet du frottement dans le tuyau, ou la partie de la charge employée à le vaincre : or, on voit que quand l'ajutage est mince, $\sqrt{2g'x}$ exprime la vîtesse à l'orifice ; $\frac{a\sqrt{2g'x}}{pA}$ la vîtesse dans le tuyau, et $\frac{2g'a^2x}{2Gp^2A^2}$ la hauteur due à cette derniere vîtesse. Ainsi, en estimant cette vîtesse à-peu-près, on calculera la charge H', qu'il faudrait à un tuyau de même longueur et de même diametre, ouvert par le bout, pour produire une vîtesse presque égale, dont h' serait la partie employée à vaincre la résistance des parois; et à cause que les résistances sont sensiblement comme les quarrés des vîtesses, quand celles-ci different peu, on fera la proportion suivante : $H'-h' : h' :: \frac{2g'}{2G}\frac{a^2x}{p^2A^2}$: un quatrieme terme $\frac{2g'}{2G}\frac{a^2xh'}{p^2A^2(H'-h')}$, qui sera la hauteur due à la résistance : cette quantité étant retranchée de la charge entiere H, le reste exprimera la charge relative à la formule (A), ou la quantité qui y est simplement représentée par H. Ainsi on peut former l'équation $x = \frac{A^2}{A^2+\left(\frac{2g'}{2G}-\frac{2g'}{2g}\right)\frac{a^2}{p^2}}\left(H-\frac{2g'a^2xh'}{2Gp^2A^2(H'-h')}\right)$,

d'où l'on tire $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(\frac{2g'}{2G} - \frac{2g'}{2g}\right)\frac{a^2}{p^2} + \frac{2g'}{2G}\,\frac{a^2h'}{p^2(H'-h')}}$, formule générale (E) pour ces sortes de jets, quand l'ajutage est mince.

Si l'ajutage est un tuyau additionnel, $\sqrt{2Gx}$ sera la vîtesse à l'orifice ; $\frac{a\sqrt{2Gx}}{A}$ sera la vîtesse dans le tuyau ; $\frac{a^2x}{A^2}$ est la hauteur due à cette vîtesse, et $\frac{a^2xh'}{A^2(H'-h')}$ sera la charge employée à vaincre le frottement. Ainsi, prenant $H - \frac{a^2xh'}{A^2(H'-h')}$ pour la quantité désignée simplement par H dans la formule (B), on aura $x = \frac{A^2}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2}\left(H - \frac{a^2xh'}{A^2(H'-h')}\right)$, et en réduisant, $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2 + \frac{a^2h'}{(H'-h')}}$, formule (F).

269. Si, dans les deux derniers cas, on supposait le tuyau débouché, ou que l'orifice devînt aussi large que l'aire même du tuyau, il n'y aurait plus alors aucune espece de contraction ni de frottement au passage du tuyau à l'orifice. Ainsi il faudrait alors faire les mêmes suppositions qu'à la fin du chapitre quatrieme ; c'est-à-dire qu'il faudrait multiplier a^2 par $\frac{2g'}{2g}$, quand l'ajutage est mince, ou le diviser par $\frac{2G}{2g}$, quand c'est un tuyau additionnel ; et si l'on fait en même temps $a = A$, les deux formules se réduisent à $x = \frac{2G}{2g}\,H\,\frac{(H'-h')}{H'}$.

Mais, en nommant h la véritable charge employée à vaincre la résistance le long du tuyau, on a $\frac{H'-h'}{H'}=\frac{H-h}{H}$. Ainsi $x=\frac{2G}{2g}(H-h)$, comme cela doit être. En effet, puisque x exprime toujours la charge capable d'imprimer la vîtesse du jet, et de vaincre le frottement de l'orifice, qu'on suppose nul ici, il faut qu'on trouve pour x la hauteur naturelle due à la vîtesse dans le tuyau de conduite.

270. Nous ne connaissons point d'expériences exactes sur les jets dont les conduites sont un peu longues; et nous ne pouvons comparer la théorie précédente à l'expérience que pour des conduites très-courtes, dans lesquelles l'effet du frottement contre les parois peut être négligé. Les formules (C) et (D) remplissent cette condition. Quant à celles (E) et (F), si le frottement de la conduite est nul, on n'a qu'à supposer $h'=0$; et elles se réduiront aux formules (A) et (B).

S'il ne s'agissait que de connaître la dépense des jets, on regarderait l'ajutage comme un orifice adapté immédiatement à un réservoir sous la charge x, éprouvant la même contraction et le même frottement d'orifice que quand il est placé au bout de la conduite. La dépense se détermineroit alors par la méthode du chapitre troisieme; mais en ne considérant que la hauteur à laquelle le jet doit s'élever par la charge x, on peut demander si les filets du milieu, qui ont une vîtesse sensiblement due à la hauteur x, s'éleveront à cette hauteur, ou bien si la viscosité de l'eau éta-

blissant une sorte d'égalité entre les efforts des différents filets, le jet ne s'élevera qu'à la hauteur due à la vîtesse moyenne. L'expérience seule peut éclaircir ce doute; et elle paraît affirmer la deuxième question, comme nous l'avons déja dit. Ainsi la vîtesse moyenne d'un ajutage mince, sous la hauteur x, étant égale à $\sqrt{2g'x}$, ou $\sqrt{(2g-K)x}$, la chûte naturelle qui lui répond, ou l'élévation du jet sera représentée par $x\,\frac{(2g-K)}{2g}$, si l'ajutage est mince, et par $\frac{2G}{2g}\,x$, si c'est un tuyau additionnel.

Il faut remarquer que, dans les valeurs de x, H exprime toujours la hauteur de la charge jusqu'à l'axe du tuyau au-dessous de l'ajutage, et que c'est de cet axe qu'on doit compter les élévations du jet. Dans les expériences de M. l'abbé Bossut, que nous allons rapporter, les charges et les hauteurs des jets ne sont comptées que jusqu'à la paroi supérieure du tuyau de conduite; cependant comme ces hauteurs sont beaucoup plus considérables que les rayons des tuyaux, nous pouvons, sans erreur sensible, nous servir des mêmes données, comme si elles étaient prises jusqu'à l'axe du tuyau.

271. Un tuyau horizontal de 3 pouces 8 lignes de diametre, dont on ne connaît pas exactement la longueur, quoiqu'il fût assez court, a été adapté à un réservoir, sous une charge de 11 pieds de hauteur. Vers son extrémité, et dans sa partie supérieure était un mince ajutage de 2 lignes de

diametre : en approchant du réservoir il y en avait deux autres de 4 lignes et de 8 lignes de diametre. Au - delà étaient deux ajutages formés par des tuyaux additionnels de 5 pouces 10 lignes de hauteur, et de 4 lignes de diametre par le haut : le premier s'évasait par le bas ; l'autre était cylindrique. A l'opposé du réservoir était un autre tuyau horizontal de 9 à 10 lignes de diametre, que nous avons estimé de $0^{po},8$, sous la même charge de 11 pieds ; trois ajutages, de même diametre que les premiers, y furent placés dans le même ordre.

Le tableau suivant présente les résultats de l'expérience comparés à ceux de la théorie, par le moyen des formules (C) et (D). Nous n'avons marqué pour le gros tuyau que les hauteurs du jet incliné, qui sont plus grandes que celles du jet vertical, où la gerbe est rabaissée par la chûte de l'eau supérieure ; dans le second tuyau on ne connaît que les hauteurs du jet vertical.

Numéros des expériences.	Diametres des ajutages.	Valeurs de K.	Valeurs de x.	Hauteurs des jets, suivant la théorie.	Hauteurs des jets, suivant l'expérience.
Tuyau de conduite de 3 po. 8 li. de diametre.					
e.	li.	po.	po.	po.	po.
1	2	37,5	132,0	125,1	124,5
2	4	21,5	132,0	128,0	127,5
3	8	13,5	131,9	129,4	128,0
4	4	ajutage	conique		116,5
5	4	cylind.	132,0	87,1	87,5
Tuyau de conduite de $0^{po},8$ de diametre.					
6	2	37,5	132,0	125,1	119,0
7	4	21,3	129,7	125,9	115,8
8	8	11,2	103,0	101,4	94,0

272. On voit, par la comparaison des deux résultats, qu'on peut, sans erreur sensible, prendre pour hauteur du jet celle qui est due à la vîtesse moyenne à l'orifice, tant pour les ajutages minces que pour les tuyaux additionnels. Dans le premier tuyau la vîtesse à la prise d'eau est presque nulle, en comparaison de celle des jets, dont les hauteurs ne sont diminuées que par le frottement contre les bords de l'ajutage. La vîtesse dans le deuxieme tuyau est considérable, sur-tout à la huitieme expérience; et si les hauteurs des jets sont plus diminuées que la théorie ne semble l'indiquer, c'est par des causes trop compliquées, pour avoir pu en tenir compte dans l'équation; d'abord par la chûte de l'eau supérieure, qui a lieu dans les tuyaux parfaitement verticaux, et qui n'est pas même parfaitement détruite par une faible inclinaison, et ensuite, par l'irrégularité de la contraction : car ici la plus grande partie de l'eau afflue vers l'orifice des deux côtés opposés, et très-peu dans le sens du jet; les filets latéraux se choquent en se croisant; et de là il résulte nécessairement une perte de vîtesse, à moins que les ajutages ne soient très-petits en comparaison du tuyau. Dans la septieme expérience la gerbe était déja très-élargie, et dans la derniere il se formait quantité de jets particuliers, qui s'éparpillaient avec des directions et des élévations différentes.

Malgré la perte de la vîtesse, causée par l'irrégularité de la contraction, les expériences du petit tuyau prouvent assez bien que la partie de la

charge employée à imprimer la vîtesse dans le tuyau, n'influe pas sur la vîtesse du jet. Pour prouver de même que les résistances latérales du tuyau n'influent point sur la vîtesse, dans le sens de sa longueur, nous examinerons les autres expériences de M. l'abbé Bossut sur un tuyau recourbé verticalement, et dont les différents ajutages étaient percés dans la platine mince et horizontale qui en bouchait l'extrémité. Ce tuyau, d'un pouce de diametre, avait 3 à 4 pieds, ou même davantage, de longueur, et était adapté au fond d'un grand entonnoir, sous une charge constante de 3 pieds 2 pouces 11 lignes, jusqu'à l'ajutage. On ne peut pas négliger dans ces expériences les résistances causées par le frottement sur la longueur du tuyau et le choc contre le coude, ni la perte de hauteur qu'éprouve tout jet vertical par la chûte des parties supérieures : car il ne paraît pas qu'on eût incliné le jet pour diminuer cette perte; mais, comme nous ne connaissons ni la forme du coude, ni la *longueur* du tuyau, il nous est impossible de déterminer par la théorie quelle devait être la véritable hauteur des jets. Cependant, pour ne pas négliger des expériences aussi exactes, nous les avons mises à profit d'une autre maniere : la derniere donne environ 33 pouces de vîtesse dans le tuyau, et la hauteur du jet y est de 3^{po},4 plus petite que celle qui serait calculée sans aucune résistance dans le tuyau. Nous avons donc pu, avec raison, attribuer cette différence aux diverses

causes de résistances; et, d'après cette base, nous avons déduit le déchet sur la hauteur du jet dans les autres expériences, en le faisant proportionnel au quarré des vîtesses dans le tuyau. Ces vîtesses sont, à-très-peu-près, comme les aires des ajutages, et leurs quarrés comme les quatriemes puissances des diametres des ajutages. C'est ainsi que nous avons formé le tableau suivant, dans lequel la troisieme colonne exprime les hauteurs dues à la vîtesse du jet, sans résistance dans le tuyau, d'après la formule (A); la quatrieme exprime les élévations du jet, relatives aux charges précédentes; la cinquieme, les hauteurs réelles du jet d'après l'expérience; et la sixieme, ces mêmes hauteurs augmentées du déchet occasionné par les résistances. On remarquera que, comme le tuyau de conduite était adapté au fond d'un entonnoir, la contraction n'y était pas aussi grande qu'à l'entrée ordinaire des tuyaux; et, d'après quelques expériences de M. de Poleni sur les tuyaux additionnels, nous avons conclu, pour ce cas, que la quantité 2G égalait à-peu-près le nombre 510 pouces, au lieu de 478. C'est la valeur que nous lui avons donnée dans l'expression de x.

Diametre des ajutages.	Valeurs de K.	Valeurs de x, y sans résistance.	Hauteurs du jet, suivant la théorie.	Hauteurs réelles du jet.	Hauteurs réelles du jet, sans résistance.
	po.	po.	po.	po.	po.
1	36,7	38,9	37,1	37,5	37,5
2	19,1	38,9	37,8	37,7	37,7
3	13,3	38,9	38,2	38,0	38,1
4	10,4	38,8	38,3	37,6	37,9
5	8,7	38,7	38,3	37,4	38,3
6	7,5	38,5	38,2	36,3	38,2
7	6,6	38,2	37,9	34,5	37,9

Cette comparaison est assez satisfaisante pour prouver que dans ce cas le jet n'est point diminué par la hauteur due à la vîtesse dans le tuyau, mais par celle qui est employée à vaincre la résistance, laquelle agissant horizontalement contre les parois au-dessous du jet, ne peut pas influer sur sa hauteur.

Traité du mouvement des Eaux. Part. IV. Disc. I.

273. M. Mariotte a fait sur les jets d'eau un assez grand nombre d'expériences; mais il a souvent omis de faire mention de plusieurs données importantes, qu'il croyait indifférentes, quoique sans elles on ne puisse comparer exactement ses résultats avec ceux de la théorie : il a employé, par exemple, un tuyau vertical de 3 pouces de diametre, recourbé par le bas, et garni d'une platine horizontale, dans laquelle étaient percés des orifices de différents diametres. Au haut de ce tuyau s'adaptait un tambour qui servait de réservoir; et en allongeant le tuyau, il pouvait se procurer différentes charges, qu'il a augmentées jusqu'à 50 pieds de hauteur. C'est avec cet appareil qu'il a fait la plupart de ses expériences, sans faire con-

naître quel était le développement du tuyau, qui devait néanmoins faire éprouver, dans plusieurs cas, une résistance considérable, sur-tout avec un coude très - brusque. En estimant ce développement de la maniere la plus probable, nous avons trouvé que ses expériences s'accordent assez bien avec la théorie.

274. Pour connaître la meilleure forme des ajutages, M. Mariotte s'est servi d'un autre tuyau vertical, d'un diametre vraisemblablement moindre, et recourbé horizontalement par le bas : ayant fait dans cette partie une ouverture de 6 lignes, le jet ne monta qu'à 12 pieds, quoique la charge fût de 27; ce qui prouve assez que le tuyau de conduite étant d'un petit diametre, la vîtesse y était considérable, et que la hauteur du jet était encore diminuée par l'irrégularité de la contraction, car la gerbe s'écartait beaucoup : il recourba ensuite son tuyau verticalement, et après avoir essayé plusieurs formes d'ajutages, qui ne lui réussirent pas, il perça la platine horizontale d'un orifice de 6 lignes : alors le jet d'eau s'éleva à 32 pieds, avec une charge de 35 pieds 5 pouces; ce qui prouve, comme on le déduit de notre théorie, que quand le tuyau est assez court pour que la résistance ne soit pas très-considérable, en comparaison de la charge entiere, il faut percer les ajutages sur la platine horizontale qui bouche l'extrémité du tuyau, sur-tout si l'on veut que le jet soit un peu gros ; mais qu'au contraire dans de longues conduites, où la vîtesse est faible, et le frottement

considérable, il vaut mieux percer l'ajutage dans la paroi supérieure du tuyau horizontal, parce que tout l'effet du frottement sert à l'élévation du jet.

275. M. Mariotte a remarqué dans ses expériences un effet singulier, qui se peut rapporter à ce que nous avons dit ci-devant (263), et qui peut causer dans les grandes charges une diminution de hauteur. La hauteur du tambour de son appareil n'était pas considérable, en sorte que quand l'ouverture et la charge de l'ajutage étaient fort grandes, il ne pouvait pas entrer dans le tuyau de 3 pouces autant d'eau que l'ajutage en aurait dépensé avec la charge entiere : la pression de l'air sur l'ajutage empêchait qu'il ne se formât un vide dans le tuyau au-dessous du tambour; et cet effet retardait la vîtesse à l'ajutage, qui ne dépensait que ce que le tambour pouvait fournir : aussi le jet s'élevait-il fort peu, et diminuait considérablement, à mesure qu'on laissait vider le tambour; mais le niveau de l'eau étant parvenu au fond du tambour, ou à la partie supérieure du tuyau, le jet s'élevait tout-à-coup un peu au-dessous de ce niveau. (*Voy.* le § 250.)

276. Il paraît aussi par ces expériences que notre formule ne diminue pas tout-à-fait assez l'élévation des jets à 50 pieds de charge et au-delà; cela peut venir de l'irrégularité de la contraction, dont nous n'avons pas pu tenir compte, et qui est d'autant plus sensible pour un même ajutage, que la charge est plus considérable. Mais, indépendamment de

cette cause, et même de la perte occasionnée par la chûte des particules supérieures, quand le jet se forme avec une grande rapidité, le choc de l'air divise la colonne, le jet se réduit en quantité de filets et de gouttes d'eau séparées, et ne peut jaillir à toute la hauteur relative à la charge, sans néanmoins pour cela que la dépense soit différente de celle que donne la formule. Pour donner une idée de cet effet, M. Mariotte a essayé de donner à l'eau de très-grandes vîtesses, au moyen d'une arbalête et d'un pistolet; et il a trouvé que, quoique chassée avec une vîtesse considérable, elle n'a pas été à 8 pieds de distance.

277. On trouve encore dans le même auteur une expérience qu'il fit à Chantilly sur une conduite d'eau composée de tuyaux de bois, forés à 5 pouces de diametre intérieur, et emboîtés l'un dans l'autre : une partie de cette conduite était en pente, avec une charge de 18 pieds; le reste était horizontal, et passait à travers un étang, et le long d'un canal assez étendu. L'eau étant retenue par le bas, on perça dans la partie horizontale, et à 104 toises de l'origine, un orifice de 10 lignes, qui donna un jet de 15 pieds de hauteur; 80 toises plus loin, un pareil orifice aurait dû donner le même jet, mais il ne fut que de 14 pieds. Cette expérience serait contraire à nos principes, si elle n'était prouvée être défectueuse, par un fait dont M. Mariotte fait mention. Ayant fermé la prise d'eau, le jet devait cesser entièrement, ce qu'il ne fit pas, et au contraire il continua de

Ibid. Part. V. Disc. 1.

s'élever à plus de 2 pieds; ce qui fit connaître que les pieces dont la conduite était composée s'étaient déboîtées, et donnaient passage à l'eau de l'étang et du canal au fond desquels elle passait. Lors donc que le tuyau était chargé de 18 pieds d'eau, cette charge étant alors supérieure à la hauteur de l'eau de l'étang et du canal, l'eau devait s'écouler du tuyau par cette filtration; et au lieu d'avoir simplement un orifice de 10 lignes d'ouverture, toutes les ouvertures se réunissant ensemble pouvaient faire l'équivalent d'une aire de plusieurs pouces. Mais dans une autre expérience on ajouta au tuyau vertical de 3 pouces de diametre une conduite horizontale de 40 pieds de longueur; et les jets, par des ouvertures de 6 lignes, s'éleverent à la même hauteur, soit qu'ils fussent formés au pied du tuyau vertical, ou à 40 pieds de distance.

En général, M. Mariotte conclut de toutes ses expériences, que, vu l'énorme dépense que fournit une grande charge, on ne peut guere se procurer des jets de plus de 100 pieds de hauteur, et à cette limite notre formule paraît suffisante.

278. Il faut convenir que la matiere de cette quatrieme section exige de la part des lecteurs une attention soutenue et une application très-suivie. La nouveauté peut-être et la complication du sujet ne nous ont pas permis de mettre dans ce travail toute la clarté avec laquelle on expose des vérités éclaircies par un long usage, et développées déja par plusieurs auteurs. Pour en rendre l'exposition

plus nette et l'application plus facile, nous nous proposons le problême qui suit :

PROBLÊME.

Connaissant la dépense d'un réservoir, sa distance horizontale et son élévation constante au-dessus d'un bassin, où l'on veut former un jet d'eau vertical; on demande de déterminer les diametres du tuyau de conduite et de l'ajutage, ainsi que la hauteur du jet.

Supposons que la longueur de la conduite soit de 200 toises, la hauteur du réservoir de 36 pieds, et sa dépense d'un pied cube par seconde : la partie de la charge qui doit être employée à vaincre le frottement de l'eau sur 200 toises de longueur devant être considérable, il est important de ne pas la perdre pour la hauteur du jet; ainsi on doit percer l'ajutage sur la paroi même du tuyau de conduite, et non dans la platine, qui fermerait son extrémité recourbée; et comme, dans ce cas, la hauteur due à la vîtesse dans le tuyau est perdue pour le jet, il est avantageux de tenir son diametre un peu grand, pour que la vîtesse n'y soit pas très-considérable. On pourrait, dans cette vue, régler à 2 pieds la perte de hauteur employée à produire la vîtesse, c'est-à-dire que cette vîtesse dans le tuyau serait due à 2 pieds de chûte avec contraction; et, d'après cette supposition, on déterminerait aisément le diametre du tuyau. Mais, avant de régler ainsi le diametre, il faut s'assurer si le frottement produit par cette vîtesse sur

200 toises de longueur, pourrait être vaincu par la charge restante de 34 pieds. Or, d'après la dépense donnée, le diametre du tuyau serait de $4^{po},65$; la vitesse d'environ 102 pouces; et pour se procurer cette vîtesse, il faudrait une hauteur de réservoir d'environ 77 pieds, ou que le tuyau de conduite n'eût que 90 toises de longueur. Il est donc nécessaire de diminuer la vîtesse, en augmentant le diametre du tuyau de conduite. Mais, pour l'augmenter le moins possible, nous le fixerons de maniere que la dépense d'un pied cube par seconde soit la plus grande qu'il puisse faire, eu égard à sa charge et à sa longueur. C'est le cas du problême (230). En en faisant ici l'application, on trouvera que le diametre doit être de $5^{po},3632$, ou 5 pouces 3 lignes $\frac{1}{3}$; l'eau y prendra une vîtesse de $76^{po},5$, dont la hauteur due avec contraction est de $12^{po},24$. Ainsi la partie de la charge employée à vaincre le frottement, est de $34^{pi},98$, ou de $419^{po},76$.

C'est cette partie de la charge qui est destinée à former le jet, et d'après laquelle on peut déterminer le diametre de l'ajutage, suivant la hauteur à laquelle on veut que le jet s'élève. Quel que soit ce diametre, la dépense ne pourra pas excéder celle que fournit la conduite, qui est la plus grande possible. Ainsi, comme nous l'avons déja dit, plus on augmentera le diametre de l'ajutage, plus on diminuera la vîtesse, et conséquemment la hauteur du jet. Supposons donc qu'en faisant ce diametre assez grand pour dépenser un pied cube

par seconde, on veuille en même temps perdre le moins possible sur la hauteur du jet, il suffit de chercher le diametre d'un orifice adapté immédiatement à un réservoir, et capable de dépenser un pied cube, sous la charge de 419^{po},76. En effet, parmi les formules précédentes (252), celle qui était désignée par (C) convient à ce cas, et donne $x = \frac{A^2H}{A^2 + \frac{2g'a^2}{2Gp^2}}$. Mais le tuyau étant à sa plus grande dépense, et le jet à sa plus grande hauteur (267), on doit avoir $a = pA\sqrt{\frac{2G(H-h)}{2g'h}}$: substituant cette valeur dans celle de x, on a $x = h$; c'est-à-dire que la charge du jet est égale à la charge entiere, moins celle qui est due à la vîtesse dans le tuyau.

La charge du jet étant connue, le problême doit se résoudre par la formule des orifices simples (240), qui donne l'expression de la vîtesse en valeurs du rayon moyen et de la charge. Cette même vîtesse peut aussi s'exprimer en fonctions de la dépense et du rayon moyen, en sorte que la formule du paragraphe (240) peut donner la valeur du rayon moyen, et par conséquent du diametre; mais cela exige la résolution d'une équation assez compliquée du cinquieme degré. Il est donc plus simple de considérer que la vîtesse moyenne de la veine contractée à l'ajutage est représentée en général (239) par $\sqrt{H(724-K)}$, en faisant ici $H = 419,76$; et la seule difficulté consiste à trouver la valeur de K.

Nous avons vu (240) qu'en général on a $K = \frac{V}{223}\left(\frac{1}{r}+\frac{V}{79}\right)$: cette quantité, assez petite par elle-même, varie peu, soit qu'on prenne V pour la vîtesse véritable, ou pour celle qui aurait lieu s'il n'y avait point de résistance, et en faisant même une semblable supposition pour le rayon moyen. Néanmoins, pour diminuer encore l'erreur, nous supposerons d'abord que la véritable vîtesse est due à une hauteur moindre que 419po,76, telle, par exemple, que 410 pouces; alors on aurait $V = \sqrt{724 \times 410} = 545$ pouces; et la dépense, divisée par cette quantité, donnerait 3po,17 pour l'aire de la veine contractée, et 5po,099 pour l'aire de l'orifice, ces deux aires étant dans le rapport de 1 à 1,6086. Ainsi le diametre de l'orifice sera 2po,548, et son rayon moyen ou $r = 0^{po},637$. D'après ces premieres données, on a $K = 20^{po},7$: la vîtesse de la veine contractée à l'ajutage serait donc égale à $\sqrt{H(724-20,7)}$; et sa hauteur due, ou l'élévation du jet, à $\frac{H(724-20,7)}{724} = 407^{po},76$, au lieu de 410 que nous avions supposé pour calculer la valeur de K.

279. Cette erreur influe si peu sur la derniere quantité, qu'on peut regarder les calculs précédents comme assez exacts. Si on voulait cependant pousser la précision plus loin, on observerait qu'ici le rayon moyen influe peu sur la valeur de K, et que cette valeur est sensiblement proportionnelle au quarré de la vîtesse, ou à la charge qui lui est

due, de sorte que la quantité 20,7, qui répond à la charge de 410 pouces, ne doit être que de 20,6 pour celle de 407,76. Alors on trouve plus exactement que la hauteur due à la vîtesse de la veine contractée, ou la hauteur du jet, est de 407^{po},81; cette vîtesse de 543^{po},4; l'aire de la veine contractée 3^{po},17997; le diametre de cette veine 2^{po},012; et celui de l'orifice 2^{po},5524.

Le jet ne s'élevant que de 407^{po},81, perdrait 11^{po},95 par le frottement des bords de l'orifice, et par la résistance de l'air, lesquels, ajoutés à 12^{po},24, qu'il perd déja par la vîtesse de l'eau dans le tuyau, font une perte totale de 24^{po},19 sur 432 pouces de charge, ou 36 pieds : les grosseurs variables de la gerbe, ou ses sections étant, comme nous le verrons bientôt, en raison inverse des vîtesses à chaque point, on trouverait qu'à un pied du sommet son diametre serait d'environ 4^{po},8.

Tous ces calculs pourront paraître fort longs; mais on les simplifie beaucoup en négligeant une précision assez inutile dans la pratique; cette précision est cependant assez nécessaire pour le diametre de l'ajutage, sur-tout quand la dépense est déterminée, et que le tuyau de conduite ne peut pas fournir davantage. Dans notre exemple, l'augmentation de moins d'un quart de ligne dans le diametre de l'ajutage, suffirait pour produire encore un pied de perte sur la hauteur du jet. Ainsi on ne pourrait pas augmenter sensiblement la grosseur de la gerbe, sans nuire à son élévation; et pour peu, au contraire, qu'on la diminuât, elle ne

fournirait plus la même dépense, et ne s'éleverait pas sensiblement plus haut.

280. Si on conservait au tuyau de conduite le même diametre et la même longueur, et qu'on recourbât verticalement son extrémité inférieure, en bouchant aussi le premier ajutage, il faudrait, pour fournir la même dépense, que le bout fût entièrement ouvert; et comme le jet s'éleve toujours à la hauteur naturelle due à la vîtesse moyenne, il n'irait qu'à environ 8 pouces. Pour peu qu'on rétrécît ensuite son ouverture, la dépense devrait diminuer, et la hauteur du jet augmenter. Ainsi on peut supposer que le bout étant fermé par une platine horizontale, on y perce un orifice égal à celui que nous venons de calculer, et, dans cette supposition, proposer le problême suivant.

PROBLÊME.

La longueur de la conduite, la hauteur du réservoir, le diametre du tuyau et celui de l'ajutage étant les mêmes que dans le problême *précédent*, mais l'ajutage étant percé dans la platine horizontale qui ferme le bout du tuyau recourbé verticalement; déterminer la hauteur du jet et sa dépense.

La solution de ce problême se tire de la formule (E) (268), qui donne la charge employée à produire le jet, ou $x = \dfrac{A^2H}{A^2 + \left(\dfrac{2g'}{2G} - \dfrac{2g'}{2g}\right)\dfrac{a^2}{p^2} + \dfrac{2g'a^2h'}{2Gp^2(H'-h')}}$;
l'aire A a pour diametre $5^{po},36329$; celle a $2^{po},5524$;

ou plutôt le diametre de l'aire $\frac{a}{p}$ de la veine contractée est égal à $2^{po},012$; $H = 36$ pieds, ou 432 pouces. Quand aux valeurs de h' et de $H' - h'$, qui représentent, l'une la hauteur due à la résistance sur la longueur du tuyau, et l'autre la hauteur due à la vîtesse, un simple apperçu suffit pour montrer que la premiere doit être d'environ 18 pieds ou 216 pouces. Ainsi la pente fictive de la conduite serait de $\frac{1}{66\frac{2}{3}}$; la vîtesse relative dans le tuyau serait de $51^{po},62$; et la hauteur due à cette vîtesse avec contraction serait de $5^{po},574$; et on aurait $h' =$ 216 pouces; $H' - h' = 5^{po},574$. Si de la charge entiere 432 pouces on retranche celle due au frottement ou h', il reste encore 216 pouces pour la charge du jet, qui excede un peu la hauteur due à la vîtesse à l'ajutage. Supposons donc que celle-ci ne soit que de 210 pouces; en calculant K d'après cette valeur et le rayon moyen de l'orifice, on trouvera cette quantité égale à environ $10^{po},77$; de sorte que $2g'$ ou $724 - K = 713^{po},23$.

Toutes les données de la formule précédente étant ainsi déterminées avec une précision suffisante, on trouvera $x = 200^{po},5$. Il est vrai que cette valeur est un peu trop grande, parce que K a été calculé d'après une vîtesse un peu trop forte; mais cette erreur ne peut guere influer dans ce cas que de $\frac{1}{200}$ sur la valeur de x, de sorte qu'on peut faire $x = 199^{po},5$, et $K = 10$ pouces; alors la vîtesse à l'ajutage $\sqrt{x(724 - K)}$ devient $377^{po},4$;

sa hauteur due, ou celle du jet $x\frac{(724-K)}{724}$ est $196^{po},74 = 16$ pieds 4 pouces 9 lignes; la hauteur due à la vîtesse dans le tuyau doit être à celle-ci en raison inverse du quarré des aires, ou des quatriemes puissances des diametres, ce qui donne cette hauteur naturelle de $3^{po},896$; et cette même hauteur, avec contraction à l'entrée du tuyau, ou $H' - h' = 5^{po},901$. Enfin la vîtesse dans le tuyau de conduite est de $53^{po},11$; et la dépense, de 1200 pouces cubes par seconde.

Il est bon de remarquer 1° que tous les termes de la formule étant multipliés par le quarré des aires, il est plus simple de se servir des quatriemes puissances des diametres ou des rayons; 2° que si nous avons estimé $H' - h' = 5^{po},574$, tandis qu'il se trouve ensuite réellement égal à $5^{po},901$, cela ne change rien aux résultats, parce que h', qui lui sert de numérateur, a été sensiblement diminué dans le même rapport.

281. En comparant la solution de ce problême avec celle du précédent, on voit que, toutes choses y étant égales, excepté la position de l'orifice, le premier jet perd, par la résistance de l'air et du frottement des bords de l'ajutage, $11^{po},95$, tandis que le second ne perd que $2^{po},76$ par les mêmes causes; mais le premier ne perd, d'un autre côté, que $12^{po},24$ par la vîtesse de l'eau dans la conduite, tandis que le second perd $232^{po},5$ par le frottement que l'eau y éprouve, et la contraction à son entrée, de sorte que, dans le cas de l'orifice percé

dans la platine qui termine le bout du tuyau, le jet est réduit à moitié de la hauteur qu'il pourrait avoir; et la dépense diminue dans le rapport de 144 à 100. Les mêmes rapports auraient lieu, si on employait des ajutages ordinaires dans les deux cas.

Quoique la derniere disposition de l'ajutage ou de l'orifice soit désavantageuse dans cet exemple, on pourrait obtenir la même élévation de jet, en diminuant de beaucoup son diametre, ce qui diminuerait encore la dépense; ou bien en augmentant le diametre du tuyau de conduite, qui pourrait alors fournir à la même dépense que dans le premier cas. Mais on ne pourrait éviter l'un de ces deux inconvénients, ou de n'avoir qu'une gerbe très-rétrécie, ou de jeter dans la dépense d'un gros tuyau de conduite, en s'écartant de l'économie qu'on doit se proposer dans les ouvrages d'agrément encore plus que dans d'autres.

Il est cependant des cas où il serait plus avantageux de recourber le bout inférieur de la conduite, comme on le fait ordinairement, et de percer l'ajutage sur la platine horizontale qui le ferme : cela dépend de la longueur qu'on donne au tuyau depuis le réservoir jusqu'au jet. Les circonstances locales et le calcul des effets qui doivent résulter d'une disposition bien entendue, doivent servir de guide, au défaut de regle générale : car il n'y en a point à cet égard.

282. On remarque assez généralement que, quand on ouvre tout-à-coup le robinet qui doit donner passage à l'eau pour former un jet, si ce robinet

est près de l'ajutage, la gerbe s'élance d'abord fort haut, et diminue ensuite son élévation, pour se fixer à celle qui lui convient dans son état ordinaire. Cet effet marque assez communément que la longueur de la conduite fait perdre beaucoup de hauteur par le frottement dans le tuyau, et qu'il serait plus avantageux de percer l'ajutage dans la paroi supérieure du tuyau qu'à son extrémité recourbée. On pourrait dans ce cas, et dans tous ceux où il convient d'en user de même, faire former au tuyau un demi-cercle vertical dans le milieu du bassin, en tournant sa convexité vers le haut, et faisant ensorte qu'elle s'éleve exactement à la surface de l'eau du bassin : au point où cette convexité serait tangente à la ligne d'eau du bassin, serait percé l'orifice ou placé l'ajutage, qui d'ailleurs répondrait exactement au centre du bassin.

283. M. Mariotte donne, pour calculer la perte de l'élévation des jets, une regle que la plupart des hydrauliciens ont suivie depuis. Elle consiste à faire ce déchet proportionnel aux quatriemes puissances des vîtesses, ou aux quarrés des charges, en prenant pour base qu'un jet de 5 pieds perd un pouce de hauteur. Ce principe ne peut être vrai, puisqu'on n'a égard ni au frottement de l'eau dans le tuyau, ni au diametre de l'ajutage, ni à la maniere dont il est placé. L'expérience sur laquelle est fondée cette regle n'est exacte que dans quelques combinaisons des différents éléments négligés; on voit que, sans changer le diametre de la conduite, il suffit de varier celui de l'ajutage, pour

avoir plus ou moins d'un pouce de perte. Ainsi toutes les tables qu'on a dressées, d'après cette regle, sur les pertes des jets, à différentes hauteurs des réservoirs, ne sont d'aucun usage dans la pratique, puisqu'en les adoptant, il faut supposer qu'on peut négliger le frottement de l'eau dans la conduite, ou la hauteur due à la vîtesse qu'elle y prend.

284. Dans les diverses expériences qu'on a faites sur les jets d'eau, on ne s'est point occupé de leurs dépenses, et on pourrait croire d'abord que la gerbe qui s'éleve au-dessus de l'ajutage presse sur l'orifice, et pourrait en diminuer la dépense; mais on doit remarquer que, si cela était, l'eau ne pourrait pas s'élever à la hauteur qui est due à la vîtesse moyenne au passage de l'orifice. C'est pourtant ce qu'elle fait : ainsi il faut conclure que la dépense et la contraction doivent être les mêmes que si la gerbe, au lieu de s'élever, sortait horizontalement, ou s'abaissait au-dessous du réservoir; et chaque molécule qui sort de l'ajutage est, à quelques restrictions près, dans le même cas que si elle était isolée; c'est-à-dire qu'elle monte jusqu'à ce que la gravité lui ait fait perdre peu-à-peu sa force ascensionnelle. Comment donc les molécules inférieures, qui ont plus de vîtesse que les supérieures, n'agissent-elles pas sur celles-ci?

Personne n'a vu un jet d'eau, sans remarquer que la colonne diverge et s'élargit à mesure qu'elle s'éleve, comme la dénomination de gerbe l'indique assez : or, la loi de cette divergence est

donnée par la condition qu'une tranche inférieure ne doit point agir sur la supérieure ; il faut donc que la force ascensionnelle de chaque tranche infiniment mince, ou, ce qui revient au même, que sa dépense soit une quantité constante, de sorte que le produit de l'aire d'une tranche par sa vîtesse est le même à toute hauteur, et que l'étendue de la tranche est en raison inverse avec sa vîtesse (1). Or, les vîtesses diminuent en raison de la racine quarrée, de la différence entre la charge totale et l'élévation de la tranche; d'où l'on voit, comme l'expérience le prouve, que la divergence de la gerbe devient à proportion plus sensible à mesure qu'elle s'éloigne de l'ajutage. La cause physique de cet effet est que, chaque tranche étant isolée dans son pourtour, elle a une liberté parfaite, pour s'étendre en augmentant de diametre; ce qu'elle ne pourrait pas faire, si elle était contenue dans un tuyau de grosseur uniforme (2).

(1) Soient H la hauteur due à la vîtesse à l'orifice; r le rayon de sa section contractée, y le rayon d'une autre section quelconque, et x la distance de cette derniere section au sommet de la hauteur H; l'équation de la courbe génératrice de la gerbe sera $xy^4 = Hr^4$, du moins sur la majeure partie de la hauteur du jet.

(2) De là suit l'explication d'un phénomene hydraulique assez singulier : un tuyau cylindrique, ouvert par en haut, étant en partie plongé verticalement dans l'eau, si on débouche tout-à-coup l'orifice inférieur, l'eau s'éleve d'abord dans le tube au-dessus de son niveau, parce que les tranches n'ayant pas la liberté de s'étendre, agissent les unes sur les autres; mais après plusieurs oscillations, le mouvement cesse comme dans un syphon.

On pourrait objecter que, d'après cette loi, la tranche la plus élevée n'ayant plus de vîtesse, devrait avoir une aire infinie; mais il faut remarquer qu'il y a une inégalité de vîtesses dans la même tranche, qui altere un peu la suite de la loi vers la partie supérieure : car les filets du bord de la gerbe, ayant moins de vîtesse que ceux du centre, la perdent plutôt que ceux-ci, et retombent avant d'avoir atteint le sommet de la gerbe, qui ne se trouve qu'au point où les filets du centre ont entièrement perdu leur vîtesse, pour retomber à leur tour; ainsi la plus grande largeur de la gerbe est un peu au-dessous de son sommet. Cette chûte des filets extérieurs altere un peu la hauteur des jets quand il sont exactement verticaux; mais il paraît que la gerbe n'est altérée que dans sa partie supérieure.

285. Si on nomme V la vîtesse moyenne de la tranche qui sort de l'ajutage, H la hauteur qui lui est due, et A l'aire de l'orifice fait en forme de tuyau additionnel, on voit que le temps t, nécessaire à cette tranche pour parvenir au sommet de la gerbe, est représenté par $\frac{2H}{V}$: or, la dépense par seconde étant AV, la dépense pendant le temps t sera $AVt = \frac{AV \times 2H}{V} = 2AH$; mais cette dépense n'est autre chose que le volume de la gerbe, qui se renouvelle entièrement au bout de ce temps. Ainsi ce volume est un conoïde tronqué, égal au double d'un cylindre de même base et de même hauteur.

On peut remarquer que, toutes choses égales d'ailleurs, la dépense d'un ajutage en forme de tuyau additionnel est plus grande que celle d'un ajutage percé dans une plaque mince, quoique la gerbe qu'il produit s'éleve moins haut. Ainsi le dernier mérite la préférence. Dans le premier, la gerbe a pour base l'orifice même; dans l'autre c'est seulement l'aire de la veine contractée : les dépenses sont donc à-peu-près :: 13 : 10, et le volume des gerbes :: 16 × 2 : 10 × 3, ou :: 16 : 15.

286. Quoiqu'il s'en faille de beaucoup que notre but soit de faire de ce chapitre un traité complet des jets, nous ne pouvons le terminer sans parler des jets obliques. On sait que tout corps, sans en excepter les fluides, assujetti à-la-fois à l'action de la pesanteur et à celle d'une première impulsion horizontale ou oblique, décrit une parabole, du moins dans le vide. Si donc l'eau sort d'un ajutage mince percé dans la paroi verticale d'un réservoir, sa premiere impulsion est horizontale, et le sommet de la parabole qu'il doit décrire se trouve placé à l'orifice même. C'est le cas de deux expériences faites par M. l'abbé Bossut. L'orifice circulaire avait 6 lignes de diametre sous une premiere charge de 9 pieds, et une seconde de 4 pieds; le jet était reçu sur un plan horizontal situé à 4 pi. 3 po. 7 li. au-dessous de l'orifice; et on a mesuré sur ce plan l'amplitude du jet, ou l'ordonnée horizontale de la parabole : or, par la nature de cette courbe, son parametre est égal au quadruple de la chûte due à la vitesse primitive. Ainsi, en nom-

Hydrodyn., tom. II, page 120.

mant H la charge entiere jusqu'au centre de l'orifice, h la hauteur de l'abscisse, et L la longueur de l'ordonnée, ou l'amplitude du jet, on aura $\frac{(2g-K)H}{2g}$ pour la hauteur due à la vîtesse primitive, et $L = 2\sqrt{\frac{(2g-K)Hh}{2g}}$: les valeurs de K sont ici $14^{po},3$, et $8^{po},5$, et, d'après les autres données, les amplitudes doivent être de 12 pieds 3 pouces 10 lignes, et de 8 pieds 2 pouces 11 lignes. L'expérience les a données de (1) 12 pieds 3 pouces 3 lignes, et de 8 pieds 2 pouces 8 lignes.

Si on ne tenait pas compte du frottement au bord de l'orifice, et qu'on prît 4H pour le parametre, le calcul donnerait les amplitudes plus grandes, et égales à 12 pieds 5 pouces 4 lignes $\frac{1}{2}$, et 8 pieds 3 pouces 6 lignes : le léger excès des amplitudes que nous avons calculées, en tenant compte du frottement sur les amplitudes réelles, peut venir de la faible résistance que l'air oppose à la colonne fluide, dans l'espace qu'elle parcourt. En effet, ces différences de 7 lignes et 3 lignes sont sensiblement comme les quarrés des vîtesses. Ainsi, quoique la vîtesse à l'orifice fût exactement égale à $\sqrt{(2g-K)H}$, les amplitudes ont pu être un peu

(1) On ne trouve à l'endroit cité de l'Hydrodynamique de M. l'abbé Bossut, que 11 pieds 3 pouces 3 lignes pour la premiere amplitude ; mais c'est sans doute une faute d'impression, puisque l'auteur avoue que les amplitudes effectives sont comme les racines des hauteurs des réservoirs.

diminuées par cette cause ; ce qui confirme ce que nous avons dit des orifices verticaux (242).

CHAPITRE VII.

Du mouvement de l'eau dans les conduites composées de tuyaux de différens diametres.

287. Quand on veut mener l'eau d'un réservoir dans plusieurs quartiers, ou dans différentes maisons d'une grande ville, on se sert de gros tuyaux nourriciers, qui se partagent ensuite en plusieurs rameaux d'un diametre moindre ; et l'économie veut que les grosseurs des tuyaux soient proportionnées aux volumes d'eau qui doivent remplir les besoins de chaque quartier ou de chaque propriétaire.

Ces tuyaux, de diametres différents, peuvent être assemblés bout à bout, ayant un axe commun, ou perpendiculairement les uns aux autres, ou enfin sous des angles quelconques. Pour déterminer la vîtesse que l'eau prendra dans chacun, en usant des formules du chapitre IV, il ne s'agit que d'évaluer les parties de la charge employées à vaincre le frottement des parois ; en retranchant leur somme de la charge entiere, le reste peut être considéré comme une charge appliquée à un assemblage de tuyaux qui n'offrent à l'eau aucune résistance.

Pour développer cette application, nous supposerons d'abord un gros tuyau horizontal adapté à

un réservoir et fermé par l'autre bout, auquel on ajoute perpendiculairement un tuyau d'un moindre diametre; nous désignerons par x la hauteur due à la vîtesse dans le petit tuyau, telle qu'elle serait pour un tuyau additionnel du même diametre, adapté immédiatement à un réservoir, et y éprouvant la même contraction que le petit tuyau éprouve à son origine; la hauteur entiere H du réservoir étant donnée, il sera toujours facile d'exprimer vaguement quelle est la partie employée à vaincre la résistance dans le petit tuyau. Ainsi, d'après sa longueur et son diametre, on estimera aussi à-peu-près la vîtesse qui y aura lieu. Soient m la hauteur due à cette vîtesse, et n celle due à cette résistance estimée, A l'aire du grand tuyau et a celle du petit tuyau; on pourra faire la proportion $m:n :: x:\frac{nx}{m}$, quatrieme terme, qui exprime plus exactement la partie de la charge employée à vaincre la résistance dans le petit tuyau : la hauteur due à la vîtesse dans le gros tuyau sera exprimée par $\frac{a^2x}{A^2}$, parce que la dépense dans les deux tuyaux étant la même, les vîtesses sont comme l'inverse des aires; et par conséquent les hauteurs dues à ces vîtesses sont comme l'inverse des quarrés des mêmes aires. Or, cette hauteur, étant considérée comme charge, n'agit point sur le mouvement dans le petit tuyau, qui a lieu dans une direction perpendiculaire : ainsi celle qui y pousse l'eau est seulement égale à $H-\frac{a^2x}{A^2}$. D'un autre côté, cette force motrice est aussi représen-

tée par la somme des hauteurs dues à la vitesse et à la résistance que l'eau éprouve dans le petit tuyau, ou à $x+\frac{nx}{m}$. On a donc l'équation $H-\frac{a^2x}{A^2}=x+\frac{nx}{m}$; d'où l'on déduit $x=\frac{A^2H}{A^2+a^2+\frac{A^2n}{m}}$.

288. En supposant que le petit tuyau devienne fort court, et se réduise à un simple tuyau additionnel, on a $n=0$, et $x=\frac{A^2H}{A^2+a^2}$, comme dans la formule (D) des jets d'eau (252). On peut appliquer ici la même observation, pour trouver la limite de la plus grande valeur de a, afin que la dépense du petit tuyau soit la plus grande possible, ce qui a lieu quand la dépense totale est égale à celle que donnerait le gros tuyau, s'il était seul, et ouvert à son extrémité. Ayant déterminé le diametre du petit tuyau pour ce cas, il serait inutile de l'augmenter, puisque le gros tuyau ne lui permettrait pas de donner plus de dépense.

289. Si les deux tuyaux, au lieu d'être perpendiculaires l'un à l'autre, étaient prolongés sur le même axe, il faudrait estimer de plus les hauteurs dues à la vitesse et à la résistance du gros tuyau. Soient m' et n' ces hauteurs, puisque $\frac{a^2x}{A^2}$ exprime la hauteur due à la vitesse dans le gros tuyau; $\frac{n'a^2x}{m'A^2}$ sera la hauteur due à sa résistance. Si donc on retranche de la charge entière les hauteurs des résistances pour chaque tuyau, le reste $H-\frac{n'a^2x}{m'A^2}-$

$\frac{nx}{m}$ sera considéré comme une charge appliquée à vaincre la contraction d'orifice de deux tuyaux additionnels consécutifs, dans lesquels la résistance est nulle ; et il sera égal à ce que nous avons simplement désigné par H dans le chapitre IV (262), formule (B), dans laquelle $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2}$;

ainsi on aura ici $x = \frac{A^2\left(H - \frac{n'a^2x}{m'A^2} - \frac{nx}{m}\right)}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2}$, d'où l'on tire $x = \frac{m'mA^2H}{m'm\left(A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2\right) + mn'a^2 + m'nA^2}$.

290. En supposant le petit tuyau réduit à un simple tuyau additionnel, on aurait $n = 0$, et l'équation se réduit à $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2 + \frac{n'a^2}{m'}}$, comme dans la formule (F) (268) des jets d'eau.

Si le diametre du petit tuyau devenait égal à celui du gros, on aurait $A = a$, et $m' = m$; mais il faut observer, comme nous l'avons fait ci-devant, que n'y ayant plus de contraction au passage d'un tuyau à l'autre, a^2 doit être divisé par $\frac{2G}{2g}$, et au contraire la hauteur m, relative à l'entrée du petit tuyau, doit être diminuée, en la multipliant par le même rapport. D'après cela l'équation se réduit à $x = \frac{2G}{2g}\frac{m'H}{m'+n'+n}$; mais la somme des hauteurs dues à la vitesse à l'entrée du tuyau, et aux résistances sur les deux longueurs, est elle-même

la hauteur entiere du réservoir. On a donc $H = m' + n' + n$, $x = \frac{2Gm'}{2g}$, expression de la hauteur naturelle due à la vîtesse sans contraction.

291. Il arrive souvent que le petit tuyau est adapté au gros, suivant un certain angle d'inclinaison : alors une partie de la hauteur due à la vîtesse du gros tuyau, et une autre de la hauteur due à sa résistance, doivent être comptées dans la charge entiere du petit, la premiere en raison du cosinus, et l'autre en raison du sinus de l'angle; mais si cet angle, formé par les deux directions, était plus grand que 90 degrés, c'est-à-dire que le petit tuyau tendît à se rapprocher du réservoir, la premiere partie se devrait retrancher de la charge du petit tuyau, comme nous l'avons reconnu par l'expérience (460), et ainsi que l'indique d'ailleurs le cosinus, qui devient négatif. Cette derniere disposition est certainement la moins avantageuse. Quant à celle d'un angle aigu, elle devient bonne ou mauvaise, selon la vîtesse de l'eau dans le gros tuyau, et la résistance qu'elle y éprouve. Si, comme il arrive le plus souvent, la hauteur due à la vîtesse y est moindre que celle qui est due à la résistance, il est évident qu'il faut laisser agir la derniere charge le plus qu'il est possible sur le petit tuyau, et l'adapter par conséquent au premier, suivant un angle droit.

292. En réfléchissant un peu sur les principes que nous venons d'établir, on parviendra à combiner un assemblage de tuyaux de la maniere la

plus avantageuse, et aux moindres frais possibles, pour remplir l'objet qu'on se propose.

Nous avons, à la vérité, laissé dans nos recherches une sorte d'incertitude sur l'espece de la contraction qui a lieu au passage d'un tuyau à un autre : car nous avons toujours supposé qu'elle était la même que celle d'un tuyau additionnel adapté à un grand réservoir, où la vîtesse diminue dans le rapport de $\sqrt{724}$ à $\sqrt{478}$. Cependant la contraction peut être moindre ou plus forte, suivant la disposition et le diametre des tuyaux : car il n'y a point de formule générale qui puisse exprimer cette perte de mouvement dans tous les cas. Heureusement cet élément n'influe que sur la hauteur due à la vîtesse dans le tuyau, hauteur bien au-dessous de celles qui sont dues à la résistance, quand les tuyaux sont longs, comme on les emploie dans la pratique.

Voici un exemple qui réunit plusieurs applications des principes qu'on vient de voir, renfermées dans un problême, dont nous nous contenterons d'indiquer la solution.

PROBLÊME.

293. La quantité d'eau que peut fournir constamment un réservoir étant donnée, on veut la diviser et la distribuer en plusieurs points, suivant un certain rapport déterminé, par le moyen d'un tuyau nourricier, et de plusieurs autres tuyaux d'un moindre diametre, adaptés perpendiculairement au premier. On connaît la position et la

différence de niveau des différents points entre eux et avec le réservoir; et on demande de fixer les diametres de tous ces tuyaux, dans la vue de remplir l'objet avec le plus d'économie.

Ce problême, pris dans sa généralité, n'est pas susceptible d'une solution exacte et rigoureuse; mais l'établissement d'un pareil ouvrage est d'assez de conséquence pour qu'on ne néglige pas d'essayer par le calcul plusieurs combinaisons, parmi lesquelles on choisira aisément la plus avantageuse. La premiere difficulté est la direction rectiligne ou sinueuse du tuyau nourricier : les circonstances locales peuvent seules décider à cet égard, en rendant les plus gros tuyaux de partage les plus courts possibles. Cette direction étant déterminée, si le tuyau nourricier est long, et que la hauteur due à la vîtesse que l'eau y prendra soit moindre que celle qui est due à la résistance, il faudra fixer son diametre, d'après la dépense totale, comme s'il était isolé et ouvert à son extrémité. La vîtesse étant connue dans l'intervalle entre le réservoir et le premier tuyau de partage, la différence entre la hauteur de réservoir de celui-ci et la hauteur due à la vîtesse dans le tuyau nourricier, sera la charge du premier tuyau de partage. Après cette division, la dépense et la vîtesse dans la partie suivante du tuyau nourricier diminuent d'une quantité connue, et par conséquent aussi la hauteur due à la résistance sur la longueur du second intervalle. D'après cette disposition, la superficie du réservoir s'abaisserait, si on ne diminuait pas le diametre

du tuyau nourricier dans cette partie ; en sorte qu'avec la dépense qu'il doit faire, la vitesse y soit encore moindre que dans la partie précédente, à cause du surcroît de résistance causée par la diminution du diametre; la hauteur du réservoir pour le second tuyau de partage, moins la hauteur due à cette derniere vitesse, donnera la charge pour ce tuyau. On diminuera de même le diametre du tuyau nourricier sur le troisieme intervalle, et tous les autres jusqu'au dernier, où il serait bouché. On connaîtra ainsi les charges particulieres pour chacun des tuyaux de partage; et comme on suppose la longueur et la dépense de chacun fixées, il sera aisé de fixer leurs diametres.

CHAPITRE VIII.

Du mouvement de l'eau dans les pompes.

294. Les pompes sont des machines trop connues pour en donner ici une description détaillée. On peut, d'ailleurs, consulter à cet égard l'Architecture hydraulique de M. Belidor, du moins quant à la partie pratique. La théorie des pompes dans l'état d'équilibre est très-simple; mais si on les considere en mouvement, elles présentent les recherches les plus épineuses, quand on ne veut pas s'écarter de la précision géométrique. Pour suivre une marche plus à portée des artistes, nous donne-

rons une idée suffisamment exacte des principales résistances qu'il faut vaincre dans le jeu des pompes, en continuant d'appliquer ici les principes ci-devant établis; et nous indiquerons en même temps le travail qui reste à faire, pour en perfectionner les parties, et en étendre la théorie.

Fig. 26. 295. Pour commencer par la pompe aspirante, la plus simple, nous supposerons un seul tuyau vertical ABMN, plongé par le bas dans un réservoir rempli d'eau jusqu'à la ligne CBD; le piston H est garni d'une soupape qui s'ouvre de bas en haut; au-dessous est une autre soupape E, fixée au corps de pompe, et qui s'ouvre dans le même sens : après plusieurs coups de piston, l'air contenu dans le corps de pompe est chassé et remplacé par l'eau qui s'éleve du réservoir, en passant par la soupape E; et cette eau, refoulée par la descente du piston, et obligée de traverser sa soupape H, est élevée ensuite par l'ascension du piston, et obligée de se dégorger à la partie supérieure A du corps de pompe.

La pompe étant ainsi en jeu, nous pouvons considérer le piston sans pesanteur dans l'eau, sa masse et le diametre de sa tige extrêmement petits; et chercher quelle est la force nécessaire pour le faire monter avec une vîtesse donnée.

296. Quand l'eau n'est encore élevée que jusqu'en H au-dessous du piston, on sent que pour soutenir la colonne d'eau HB, il faut diminuer la pression de l'atmosphere sur le piston, de la même quantité dont elle est diminuée dans sa face infé-

rieure par le poids de la colonne d'eau élevée ; ce qui exige une force qui tire le piston du bas en haut, avec un effort égal au poids de cette colonne; mais quand l'eau est parvenue au sommet A du corps de pompe, il faut de plus soutenir la colonne AH. Ainsi la force nécessaire pour maintenir le piston en équilibre, quand la soupape H est fermée et l'autre ouverte, est égale en général au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base l'aire du piston ou du corps de pompe, et pour hauteur celle à laquelle l'eau est élevée au-dessus de la superficie CD du réservoir.

Telle est la théorie ordinaire des pompes pour l'état d'équilibre ; mais si on veut mettre l'eau en mouvement, en élevant le piston avec une vîtesse donnée ; il est évident qu'il faut ajouter, au premier effort, une force égale à une charge d'eau capable d'imprimer cette vîtesse, en surmontant les obstacles que présente l'entrée du corps de pompe et la soupape fixe E. Cette charge ou augmentation de force est exactement égale à celle qui serait nécessaire pour mouvoir l'eau avec la même vîtesse dans le corps de pompe, s'il était situé horizontalement, et adapté à un réservoir dont la plus grande hauteur ne pourrait jamais excéder 32 pieds, qui équivalent au poids de l'atmosphere. Sous ce point de vue il est facile de déterminer la force qui fait agir le piston, d'après les formules du chapitre IV.

297. Soient V la vîtesse du piston, A l'aire du corps de pompe, *m* et *n* les aires de l'entrée du

corps de pompe et de l'orifice de la soupape fixe, diminuées l'une et l'autre par la contraction; si cet effet était nul, et qu'on supprimât la soupape, $\frac{V^2}{2g}$ exprimerait la hauteur de la charge nécessaire pour imprimer la vîtesse V. Mais à cause de la contraction et de l'étranglement causé par la soupape, cette hauteur devient égale (248) à $\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-1\right)$. Ainsi nommant D la densité de l'eau, et p le poids qui représente la force à ajouter à celle qui fait équilibre à la colonne d'eau élevée, on aura $p=\frac{ADV^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-1\right)$; d'où il résulte que l'effort pour rompre l'équilibre, et vaincre l'effet des étranglements dans les pompes, est proportionnel au quarré de la vîtesse du piston, et indépendant de la hauteur à laquelle l'eau est élevée; de sorte que, pour une petite hauteur, il peut devenir une partie considérable de la force totale.

298. Il faut cependant remarquer que, si la vîtesse du piston devenait plus grande que celle que le poids total de l'atmosphere, ou 32 pieds de hauteur de charge, peuvent imprimer dans le corps de pompe, après avoir vaincu les résistances, l'eau ne suivrait plus le piston, et les résistances resteraient proportionnelles au quarré de la vîtesse de l'eau, et non au quarré de la vîtesse du piston; mais ce cas n'arrive pas dans la pratique.

Il aurait lieu cependant, si le bas du corps de pompe était fermé par une platine, au milieu de laquelle fût percé un orifice simple, dont l'aire fût,

par exemple, quatorze fois plus petite que celle du corps de pompe, et qu'on fît mouvoir le piston avec une vîtesse de 2 pieds par seconde : car, pour que l'eau pût suivre le piston, il faudrait qu'elle eût au passage de l'orifice une vîtesse de 28 pieds; ce qui est impossible, parce que le poids de l'atmosphere ne peut en imprimer une que de 27 pieds environ par un orifice semblable.

299. Les rapports $\frac{A}{m}$ et $\frac{A}{n}$ varient dans toutes les pompes, suivant la forme des soupapes, et de l'entrée de ces pompes : il est vrai qu'on a soin d'évaser cette entrée autant qu'il est possible, pour faciliter l'introduction de l'eau; mais on est obligé de la garnir d'un crible ou panier d'osier, pour arrêter les corps étrangers; ce qui fait éprouver à l'eau une contraction considérable. La soupape se ferme par un clapet à charniere, ou par une espece de coquille, qui a un mouvement vertical : cette derniere se présentant directement au-dessous de l'ouverture par où passe l'eau, lui fait perdre son mouvement vertical, et l'oblige de s'écarter latéralement, en se réfléchissant de tous côtés sur les parois du corps de pompe; le clapet, en s'ouvrant à charniere, se trouve arrêté avant que son plan soit devenu parallele à l'axe de la pompe, afin que la pression de l'eau, abandonnée à son poids par la descente du piston, le fasse retomber sur l'orifice qu'il doit boucher. Cette disposition rétrécit un peu l'ouverture de la soupape, et rejette l'eau à l'opposé du clapet; mais sa rési- Fig. 27.

stance est *bien* moindre que celle que produit la coquille, *dont* le poids d'ailleurs doit être supporté par la force motrice : il est vrai que la roideur de la charniere du clapet fait aussi une résistance; mais, tout compensé, la fermeture à coquille paraît moins avantageuse, quoiqu'elle puisse avoir des avantages qui compensent ses défauts. C'est aux artistes à décider cette question.

300. Supposons que m et n représentent toujours les aires de l'entrée du tuyau et de la soupape, diminuées de manière à donner, sans contraction, la même dépense qu'elles donnent avec contraction, par leurs véritables orifices, et que les valeurs des rapports $\frac{A}{m}$, $\frac{A}{n}$ sont entre 4 et 6; ou, si l'on veut, qu'ils sont chacun égaux à 5 : si l'on fait mouvoir le piston avec une vîtesse de 2 pieds par seconde, ou de 24 pouces, on aura $\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-1\right)=\frac{576}{724}(25+25-1)=39$ pouces, à très-peu près. Ainsi la force nécessaire pour vaincre la résistance seule des orifices, avec cette vîtesse, sera représentée par le poids d'une colonne d'eau de 3 pi. $\frac{1}{4}$ de hauteur dans le corps de pompe. Si donc il fallait élever l'eau à 60 pieds de hauteur, il faudrait ajouter au poids de l'équilibre environ $\frac{1}{18}$; et si l'élévation n'était que de 10 pieds, l'augmentation serait égale au tiers.

301. La force nécessaire pour imprimer le mouvement et vaincre la résistance des étranglements, étant donc de si grande conséquence, il

est à desirer que les artistes, qui ont sous la main tous les instruments nécessaires, fassent des expériences propres à déterminer l'intensité des différentes contractions, suivant la maniere dont sont disposées les soupapes et l'entrée du tuyau. La pompe étant placée horizontalement, son entrée baignée dans l'eau d'un réservoir, sa soupape retenue à l'ouverture convenable, et avec une charge de réservoir connue ; on combinerait la vîtesse de l'écoulement avec la hauteur de la charge, et on assignerait le rapport des différents effets, et des résistances à vaincre, avec cette hauteur, ou le quarré de la vîtesse de l'eau dans le tuyau, qui représenterait la vîtesse du piston.

302. Dans l'usage ordinaire, on adapte au-dessous du corps de pompe un tuyau auquel on donne le nom de *tuyau d'aspiration* : il est ordinairement de bois, au lieu que le corps de pompe, qu'on nomme aussi *pompe travaillante*, est de fer, et souvent même de cuivre. Ce tuyau, dont la longueur varie suivant le besoin, est d'un plus petit diametre que la pompe, et est chassé à force dedans, par son extrémité supérieure taillée en cône tronqué, au sommet de laquelle est la soupape. Cette disposition est avantageuse pour l'extraction de l'eau des puits de mines qu'on approfondit, parce que, sans déranger la pompe travaillante, qui doit être fixée très-solidement, on substitue, l'un après l'autre, des tuyaux d'aspiration, dont les longueurs sont proportionnées au progrès du déblai du puits, et peuvent aller jusqu'à 20 à 24 pieds, (*fig.* 28). Fig. 28.

On voit que la contraction est fort diminuée à l'endroit de la soupape fixe, et que l'eau conserve en y passant une plus grande partie de la vîtesse acquise le long du tuyau d'aspiration.

303. En conservant les mêmes dénominations que ci-dessus (300), et nommant de plus a l'aire du tuyau d'aspiration, la hauteur de la charge nécessaire pour imprimer le mouvement et vaincre les obstacles, deviendra $\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-\frac{A^2}{a^2}\right)$: car l'aire diminuée par la contraction à l'entrée du tuyau étant m, la vîtesse y sera $\frac{AV}{m}$, et la hauteur due à cette vîtesse sera $\frac{A^2V^2}{2gm^2}$. Après ce passage, la vîtesse dans le tuyau d'aspiration se réduit à $\frac{AV}{a}$ jusqu'à la soupape, où elle devient $\frac{AV}{n}$ et où elle exigerait encore une charge égale à $\frac{A^2V^2}{2gn^2}$; mais la vîtesse conservée dans le tuyau d'aspiration équivaut à une charge égale à $\frac{A^2V^2}{2ga^2}$. Ainsi la charge entiere se réduit à $\frac{A^2V^2}{2gm^2}+\frac{A^2V^2}{2gn^2}-\frac{A^2V^2}{2ga^2}=\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-\frac{A^2}{a^2}\right)$.

Pour comparer cette charge à la précédente (300), supposons que l'aire de la section de la pompe soit de 36 pouces, ou $A = 36$; celle du tuyau d'aspiration 9 pouces, ou $a = 9$ pouces; l'aire diminuée de l'entrée du tuyau d'aspiration, ou $m = 6$ pouces; et l'aire diminuée de la soupape, ou $n = 8$ pouces; on aura l'expression précédente égale à $\frac{576}{724}(36 + 20{,}25 - 16) = 32$ pouces, à peu de chose près, au lieu de 39.

304. Pour juger combien il importe de ne pas faire le diametre du tuyau d'aspiration trop petit, en comparaison de celui de la pompe, supposons qu'en faisant toujours l'aire A = 36, on fasse a = 4, en ne donnant au diametre du tuyau d'aspiration que le tiers de celui de la pompe, on aura, dans le même rapport $m = 2\frac{2}{3}$, et $n = 3\frac{1}{2}$; alors l'expression de la charge nécessaire pour imprimer le mouvement, et vaincre les résistances des étranglements, devient $\frac{576}{724}(182{,}25 + 105{,}79 - 81) = 164^{po}{,}71$, c'est-à-dire plus de 13 pieds 8 pouces $\frac{1}{2}$, au lieu de 2 pieds 8 pouces que nous venons de trouver, quand le tuyau d'aspiration avait la moitié du diametre de la pompe.

Il paraît donc qu'en général le diametre de la soupape doit être le même que celui du tuyau d'aspiration, et que l'un et l'autre doivent être au moins la moitié de celui de la pompe travaillante, pourvu néanmoins que la soupape fixée à cette grandeur soit assez solide pour résister aux coups redoublés que lui fait frapper le poids de l'eau, chaque fois que le piston commence à descendre.

305. Si la résistance causée par les étranglements est d'autant plus sensible que la hauteur de la pompe est moindre, il en existe au contraire un autre, qui croît réellement avec cette hauteur; c'est le frottement que l'eau exerce sur toute la longueur de la pompe. A considérer ce frottement à la rigueur, les expériences et les données nous manquent pour le déterminer, parce qu'il est d'un tout autre genre que celui que l'eau exerce dans

un tuyau où elle coule librement : nous avons vu qu'alors la résistance des parois agit inégalement sur les couronnes de filets qui en sont plus ou moins distantes; ce qui fait qu'elles conservent des vîtesses différentes, quoique les filets se meuvent parallèlement entre eux. Ici, à la vérité, toutes les molécules sont forcées de suivre le mouvement du piston, et d'avoir la même vîtesse moyenne; mais, comme celles qui essuient vers le centre moins de résistance doivent se mouvoir plus vîte que celles qui en éprouvent davantage vers la paroi, la somme de toutes les directions des filets doit *faire la gerbe*, sans qu'il puisse y avoir de parallélisme dans leurs mouvements. Cette irrégularité doit rendre plus grande la partie de la résistance qui dépend de la viscosité du fluide, et du frottement des molécules entre elles. D'après cela nous proposerons comme une conjecture probable de supposer le frottement dans la pompe égal à celui que l'eau éprouverait dans le même tuyau, si elle s'y mouvait librement avec une vîtesse moyenne, telle que la vîtesse qui en résulterait à la paroi fût égale à celle du piston. Supposons donc une pompe de 60 pieds d'élévation, avec un diametre constant de 6 pouces, et une vîtesse de 2 pieds par seconde. Si on prend cette vîtesse pour celle qui a lieu à la paroi dans un tuyau où l'eau coule librement, on trouvera (67) que la vîtesse moyenne serait de 29^{po},4; et si on cherche, par la formule du mouvement uniforme, la pente de ce tuyau, ou la hauteur de la charge employée à vaincre la résistance, on trouvera qu'elle

serait $\frac{1}{192}$ de la longueur du tuyau, ou égale à $3^{po},7$.

306. Cet exemple prouve assez que la résistance occasionnée par le frottement de l'eau est toujours très-faible, relativement au poids total qu'il faut mouvoir. Il en existe encore un autre, qui ne peut pas être beaucoup plus sensible, c'est le frottement du piston contre la paroi du corps de pompe. Nous ne connaissons point d'expérience sur le frottement de deux surfaces mouillées, de différentes espèces, qui glissent l'une contre l'autre, en se pressant assez pour interrompre le passage de l'eau et de l'air. Malgré cette derniere condition, il est probable que le frottement du piston influe peu sur la force motrice, sur-tout parce que sa partie inférieure diminue de diametre, et ne participe pas au frottement. La longueur du piston est donc indifférente pour l'intensité du frottement qu'il éprouve; et elle offre au contraire l'avantage de diminuer la contraction de l'eau qui le traverse sous la forme d'un tuyau additionnel.

Si néanmoins on voulait s'occuper du frottement de l'eau et du piston contre les parois de la pompe, on le déterminerait par les expériences que nous avons indiquées; il suffirait d'y adapter un piston convenable, garni d'une longue tige bien unie, portée sur des rouleaux ou cylindres très-mobiles sur leur axe, afin de fixer le piston, relativement à la pompe, dans la même position que si l'un et l'autre étaient dans la situation verticale, et de rendre le mouvement semblable.

307. Après avoir considéré l'effort relatif à l'ascension du piston, il faut examiner celui qui est nécessaire pour procurer sa descente, pendant laquelle la soupape fixe est fermée, et celle du piston ouverte. Imaginons d'abord que la derniere n'existe pas, ou qu'elle soit entièrement ouverte : le piston ne peut descendre dans l'espace NEHO, LFGP, si la couronne sur laquelle il s'appuie ne fuit devant lui avec une vîtesse égale à la sienne. Nommons V cette vîtesse, A l'aire DC du corps de pompe, et a l'aire AB de l'orifice du piston, le volume d'eau déplacé par le piston pendant une seconde, sera exprimé par $(A - a)V$; et ce volume est destiné a remplir l'espace égal que le piston, dans sa descente, abandonne dans sa partie supérieure; mais, pour opérer ce remplacement, il faut que le fluide traverse le tuyau ABLN, où la veine se contracte. Soit nommée K l'aire de la veine contractée : pour qu'en une seconde le volume $(A-a)V$ passe par l'aire K, il faut que la force motrice produise une vîtesse relative $\frac{(A-a)V}{K}$, à laquelle est due la hauteur $\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A-a}{K}\right)^2$; cette hauteur exprime celle d'une colonne, dont la base est $A-a$, sur laquelle le piston presse pour descendre. Ainsi, la densité étant toujours D, et nommant p le poids de cette colonne, on a $p = D(A-a)\left(\frac{A-a}{K}\right)^2 \frac{V^2}{2g} = \frac{DV^2(A-a)^3}{2gK^2}$. On voit que cet effort est encore proportionnel au quarré de la vîtesse, et indépendant de la hau-

Fig. 29.

teur à laquelle l'eau est élevée au-dessus du piston.

Maintenant, si l'orifice est garni d'une soupape ou clapet qui se projette sur une partie de l'orifice, la quantité a ne représente plus l'aire entiere, mais l'aire diminuée par le clapet; et si on substitue une coquille au clapet, on aura $a = 0$, puisque l'espace que le piston abandonne en dessus, et le volume d'eau qu'il presse en dessous, ont également pour base l'aire entiere A du corps de pompe. Dans ce cas on a $p = \frac{DV^2A^3}{2gK^2}$.

308. Il est très-probable que, les diametres du piston et de son orifice restant les mêmes, les valeurs de l'aire contractée K varieraient dans les trois cas; c'est-à-dire sans clapet, avec clapet, et avec une coquille. C'est à l'expérience seule à les fixer; et les formules précédentes ne peuvent pas représenter tous les effets qui ont lieu dans un mouvement aussi compliqué, mais seulement servir de moyen pour les évaluer d'une maniere simple et assez exacte. En effet, si on voulait directement tenir compte du choc de la veine contre la face inférieure de la coquille ou du clapet, de la déviation et du choc oblique des particules contre la paroi, d'où elles sont encore réfléchies vers l'axe, il serait presque impossible d'assigner les valeurs particulieres de toutes ces résistances. Elles sont néanmoins comprises dans la formule, puisque leur effet se borne à diminuer l'aire de la veine contractée.

309. La pompe foulante ne differe de la pompe aspirante, qu'en ce que le piston est placé au-dessous de la soupape fixe, au lieu d'être au-dessus; cette disposition ne change rien aux résultats précédents. Quant à la pompe foulante et aspirante, son effet est absolument égal à celui de la pompe aspirante, lorsque le piston s'éleve, mais en differe dans sa descente : car le piston est plein, c'est-à-dire qu'il n'est point percé intérieurement d'un orifice; l'eau qu'il chasse en dessous passe par une soupape latérale, située au-dessus de la soupape fixe, sur la paroi du corps de pompe; et la veine contractée se meut dans une direction perpendiculaire à celle du piston. Ainsi, pour lui imprimer la vîtesse convenable, il faut ajouter à la charge $\frac{V^2}{2g}$ qui convient à la vîtesse de l'eau sous le piston, la hauteur $\frac{V^2A^2}{2gK^2}$; d'où l'on voit que le poids p, qui fait équilibre à cette résistance, est alors représenté par $\frac{DAV^2}{2g}\left(\frac{A^2}{K^2}+1\right)$.

310. Quand on veut connaître la dépense d'une pompe aspirante pendant chaque temps de la montée et de la descente du piston, il faut nécessairement avoir égard à la grosseur de la tige de ce piston. Si on nomme c l'aire de cette tige, t et t' les temps des deux vibrations ascendantes et descendantes, e le jeu ou la relevée du piston, on aura $(A-c)\frac{e}{t}$ pour la dépense par seconde, lorsque le piston s'éleve, et $(A-c)\,e$ pour la dépense totale

pendant l'ascension ; mais quand l'aire c n'est pas trop petite relativement à A, il y a encore, pendant la descente du piston, une dépense sensible, et exactement égale au volume d'eau que déplace la partie de la tige qui sort, et se plonge alternativement dans la pompe. Ainsi la dépense par seconde pendant la descente est égale à $\frac{ce}{t'}$; et pendant toute la descente, à ce : la dépense totale pendant une vibration, composée de l'ascension et de la descente, est donc égale à Ae ; et la dépense moyenne par seconde est $\frac{Ae}{t+t'}$. C'est cette derniere valeur qui peut servir à déterminer la dépense d'une pompe pendant un temps donné. On voit d'ailleurs que la grosseur de la tige n'influe point sur la dépense totale, et que la pompe rend, pendant la descente du piston, ce qu'elle a gardé pendant sa montée ; d'où il suit une construction bien simple, pour rendre réguliere la dépense d'une pompe, sans en diminuer la quantité. Il suffit qu'on ait l'équation $(A-c)\frac{e}{t}=\frac{ce}{t'}$, ou $c=\frac{At'}{t'+t}$. Si les demi-vibrations sont égales, on aura $c=\frac{1}{2}A$; si le temps de l'ascension est double de celui de la descente, ou $t=2t'$, comme cela arrive souvent dans les pompes à bras, il faut qu'on ait $c=\frac{1}{3}A$. Au reste, il sera toujours facile de déterminer les valeurs de t et t', quand on connaîtra les dimensions de la pompe, le jeu du piston, et les forces qu'on veut lui appliquer, puisque, dans les deux cas, ces valeurs sont représentées par $\frac{e}{V}$.

considérer l'espace infiniment petit de comme parcouru uniformément pendant l'instant dt. Ainsi on aura $\frac{de}{dt} = V = \frac{qr\left(C^{\frac{tq}{Pr}} - 1\right)}{C^{\frac{tq}{Pr}} + 1}$, et $\frac{de}{qr} = \frac{dtC^{\frac{tq}{Pr}}}{C^{\frac{tq}{Pr}} + 1} - \frac{dt}{C^{\frac{tq}{Pr}} + 1} = \frac{dtC^{\frac{tq}{Pr}}}{C^{\frac{tq}{Pr}} + 1} - \frac{dtC^{\frac{-tq}{Pr}}}{1 + C^{\frac{-tq}{Pr}}}$: multipliant chaque terme par $\frac{q}{Pr}$, on aura $\frac{de}{Pr^2} = \frac{\frac{qdt}{Pr} C^{\frac{tq}{Pr}}}{C^{\frac{tq}{Pr}} + 1} + \frac{\frac{-qdt}{Pr} C^{\frac{-tq}{Pr}}}{1 + C^{\frac{-tq}{Pr}}}$. Sous cette forme, les numérateurs, dans les deux fractions du second terme, sont les différentielles de leurs dénominateurs ; de sorte qu'en intégrant, on a $\frac{e}{Pr^2} = \log.\left(C^{\frac{tq}{Pr}} + 1\right) + \log.\left(C^{\frac{-tq}{Pr}} + 1\right) + C = \log.\left(C^{\frac{tq}{Pr}} + 1\right) + \log.\left(\frac{1 + C^{\frac{tq}{Pr}}}{C^{\frac{tq}{Pr}}}\right) + C = \log.\left(\frac{\left(C^{\frac{tq}{Pr}} + 1\right)^2}{C^{\frac{tq}{Pr}}}\right) + C$. Pour déterminer la constante, on voit que e devenant zéro, lorsque $t = 0$, on a $C = -L.2^2 = -2L.2$. Ainsi $\frac{e}{Pr^2} = \log.\left(\frac{(N+1)^2}{N}\right) - 2L.2 = 2\log.\left(\frac{N+1}{\sqrt{N}}\right) - 2L.2$; et enfin $e = 2Pr^2\left(L.\left(\frac{N+1}{\sqrt{N}}\right) - L.2\right) = 2Pr^2 \log.\frac{N+1}{2\sqrt{N}}$; et en substituant à r^2 sa valeur $\frac{1}{ADi^2}$, on a $e = \frac{2P}{ADi^2}\log.\frac{N+1}{2\sqrt{N}}$.

Application de ces formules.

317. Quelles que soient les forces appliquées au piston, soit qu'il monte, soit qu'il descende, on peut déterminer son mouvement par les formules précédentes, qui sont générales. La seule difficulté consiste à trouver la valeur du temps, ou de tout autre quantité contenue dans la valeur de L N, lorsque toutes les autres sont données ; mais le nombre N étant le plus souvent très-considérable, on peut presque toujours prendre N pour N + 1, sauf à corriger les résultats par une seconde opération. On a donc alors $\frac{ADi^2e}{2P} = \frac{L\sqrt{N}}{2} = \frac{1}{2}L.N - L.2$, et $2\left(\frac{ADi^2e}{2P} + L.2\right) = L.N = \frac{t\sqrt{2gpADi^2}}{P}$; équation d'où l'on tire très-aisément la valeur très-rapprochée du temps.

Les circonstances ne nous ayant pas permis de faire à cet égard des expériences, nous en rapporterons quelques-unes, d'après les observations faites par M. le chevalier de Borda, sur des pompes de différentes especes. Voyez les Mémoires de l'Académie, années 1768 et 1771. La première nous servira à faire l'application d'un problême, dont voici l'énoncé.

PROBLÊME.

318. Déterminer le mouvement d'un piston qui se meut par son propre poids dans un corps de pompe vertical, rempli d'eau, quand on connaît

sa masse, son poids dans l'eau, son diametre et celui de sa soupape.

Nous nous servirons des données de M. de Borda. Cet académicien a examiné, entre autres, une pompe employée au service des vaisseaux, dont le diametre intérieur était de 6 pouces, et celui de la soupape fixe de $3^{po},5$; ce qui donne le rapport des aires :: 3 : 1; mais à cause de la contraction, qu'il estime pour les soupapes ordinaires de 3 à 2, ce rapport devient :: $4\frac{1}{2}$: 1. Il estime de même que les aires du piston et de sa soupape, en y comprenant la contraction, étaient :: 6 : 1, ce qui suppose le véritable orifice du piston d'environ 3 pouces de diametre. C'est avec cette pompe, et, à ce qu'il paraît, avec le même piston, qu'il fit l'expérience suivante. Ayant enlevé le clapet du piston, on appliqua sur l'ouverture de la soupape une plaque de fer-blanc, percée d'une ouverture de 18 lignes de diametre : le piston chargé de poids pesait dans l'eau 41 livres; et comme il déplaçait un volume d'eau d'un demi-pied cube, son poids total était de 77 livres, ce qui suppose qu'il était plongé dans de l'eau de mer; ce piston, abandonné à son propre poids, est tombé constamment de 4 pieds en 6 secondes.

D'après ces données, $t = 6''$, $p = 41$ livres, $P = 77$ livres, $D = 72$ livres; A représente ici l'aire du piston (315), moins celle de l'orifice de 18 lig., ce qui donne $A = \frac{26^{pi},5}{144}$. Quant à la valeur de i, qui, comme nous l'avons vu, exprime le rapport entre la

vitesse du piston et celle de l'eau au passage de la soupape, à l'endroit où la veine est contractée, et que nous avons exprimé par $\frac{A-a}{K}$, elle dépend de la valeur de K, qui est l'aire de cette veine contractée. Comme le clapet ne gênait point le mouvement, puisqu'il était supprimé, c'est avec raison que M. le chevalier de Borda a supposé une contraction moindre que dans les autres pompes; et au lieu du rapport de 3 à 2, il n'a diminué l'aire a que dans celui de 14 à 10. D'après ces données, on trouve $i = 21$; et en prenant 60 pi. $\frac{1}{3}$ pour la valeur de $2g$, on aura $t\frac{\sqrt{2gpADi^2}}{P}$, ou L.N $=$ 296,25, qui répond à un nombre si considérable, qu'on peut prendre N pour N + 1. Ainsi $e = \frac{2P}{ADi^2}(\frac{1}{2}\text{L.N} - \text{L.2}) = 3^{\text{pi}},885$, au lieu de 4 pieds qu'on a trouvés par l'expérience. Mais il nous paraît que M. de Borda a estimé la contraction encore un peu trop forte pour une veine fluide, qui passe d'un tuyau de 6 pouces à un orifice de 18 lignes; sur-tout si la plaque de fer-blanc était placée sur la face supérieure du piston, en sorte que l'eau passât par un tuyau de 3 pouces avant de parvenir à l'orifice. Si on estimait $K = \frac{3}{4}a$, au lieu de $\frac{10}{14}$, on trouverait $e = 4^{\text{pi}},079$; et la différence de ce résultat avec celui de l'expérience pourrait être attribuée au frottement du piston dont nous n'avons pas tenu compte.

Si, d'après ces dernieres données, en faisant $e =$ 4 pieds, on calculait la valeur du temps, on aurait

$$t = 2\left(\frac{ADi^2e}{2P} + L.2\right)\frac{P}{\sqrt{2gpADi^2}} = \frac{e\sqrt{ADi^2}}{\sqrt{2gp}} + \frac{2PL.2}{\sqrt{2gpADi^2}}.$$

Le premier terme de cette expression, qui est la valeur du temps, en supposant le mouvement uniforme dès l'origine, est égal à 5'',856, et le second relatif au mouvement varié, n'est que de 0'',029; ce qui donne $t =$ 5'',885. Ainsi on voit que, dans cette expérience, le mouvement était sensiblement uniforme, puisqu'au bout du premier dixieme de seconde, la vitesse ne différait que de $\frac{1}{50}$ de ce qu'elle était à la fin du mouvement. Il est vrai que dans les pompes ordinaires, la résistance n'est pas aussi considérable; mais elle l'est souvent assez pour négliger la variété du mouvement.

Calculs sur la force nécessaire pour mouvoir une machine à feu.

319. Pour faire une application plus utile de cette théorie, nous allons encore examiner, d'après les observations de M. le chevalier de Borda, les pompes établies à la mine de charbon de Montrelais près d'Ingrande sur Loire. C'est par le moyen d'une machine à feu, qui les fait mouvoir, qu'elles élevent l'eau de 612 pieds de profondeur, avec dix répétitions de pompes aspirantes, d'environ 61 pieds de hauteur chacune. Le cylindre de la machine a 56 pouces anglais de diametre intérieur, qui répondent à 52 $\frac{1}{2}$ de France; les pompes ont 8 pouces 6 lignes de diametre; l'aire de chaque piston est à l'aire de la soupape :: 4 : 1; mais à cause de la contraction, M. de Borda l'estime :: 6 : 1. Quant au

rapport de cette aire avec celle des soupapes fixes, il l'établit :: 5 : 1, eu égard aux contractions; et il estime qu'une grille placée au bas de chaque corps de pompe, pour le garantir des corps étrangers, fait le même effet que la soupape fixe : la section de la tige de chaque piston est le tiers de l'aire du corps de pompe; le jeu du piston est de 6 pieds 3 pouces; et la machine donne neuf coups de piston par minute. Ainsi chaque vibration dure $6''\frac{2}{3}$; mais, comme il se fait un repos d'une demi-seconde entre l'aller et le venir, pour monter ou pour descendre, il faut réduire à $5''\frac{2}{3}$ le temps de chaque vibration, et à $2''\frac{5}{6}$ celui des demi-vibrations qui sont isochrones. Le poids des attirails des pompes, compris celle de la *bache*, autrement nommée *jaquette*, est évalué à 6000 livres, déduction faite de la plus grande partie supportée par un contre-poids qui empêche les pistons de descendre trop vîte.

320. Telles sont les données que nous avons sur cette machine, d'après lesquelles nous en estimerons plusieurs autres, qu'il serait important de connaître plus exactement. Le poids du piston du cylindre, et de la chaîne qui le suspend à la tête du balancier, est encore augmenté par celui d'un volume d'eau qui recouvre ordinairement le piston sur 2 pieds de hauteur, pour intercepter tout passage à l'air extérieur dans le cylindre. Toute cette masse, que nous nommerons en général le poids du piston du cylindre, peut être évaluée à 3000 livres; et il y a apparence qu'il est déduit du

poids des attirails des pompes, ainsi que le contre-poids qui en modere la descente. Nous évaluons ce contrepoids à 4000 livres, mues avec la même vîtesse que le piston; de sorte qu'ajoutant ces deux poids à l'excès de celui des attirails des pompes, ceux-ci pesent 13000 livres, dont la majeure partie est soutenue par les contre-poids: l'aire des pistons est de $0^{pi},39406$, qui, multipliés par 612 pieds et par 70 livres, pour la densité de l'eau, donnent 16880 livres pour le poids de l'eau qu'ils soulevent. Ainsi, en supposant que la partie des tiges des pistons, qui plonge dans l'eau, pesé, avec les ferrures, autant que l'eau qu'elle déplace, on trouve que le poids total des masses qui se meuvent, quand les pistons montent, est égal à $3000+4000+13000+16880$ livres, ou bien $P = 36880$ livres. Quand au contraire les pistons descendent, la somme des masses en mouvement est d'abord égale aux trois premieres, qui font 20000 livres, à quoi il faut ajouter la masse de la partie plongée des tiges et des pistons, que nous pouvons évaluer à un peu moins du tiers de l'eau élevée, ou à 5600 livres; de sorte que, pendant la descente des pistons, on a $P = 25600$ livres. Nous négligeons l'inertie des deux bras égaux du balancier, et le frottement de son axe, qui ne peuvent faire qu'une faible partie de la résistance totale.

321. D'après toutes ces données, examinons quel est l'excès de l'équilibre, ou la force p, nécessaire pour mouvoir les pistons des pompes, en commençant par leur descente. La différence entre

l'aire du piston et celle de la soupape, ou A = $0^{pi},394 - 0^{pi},098 = 0^{pi},296$. Cette quantité devrait être un peu plus grande, à cause du rétrécissement causé par le clapet; mais l'erreur est à-peu-près compensée, en faisant le rapport entre la différence de ces aires et celle de la veine contractée :: 6 : 1, rapport qui est un peu trop fort, puisque c'est celui de l'aire entiere du piston à celle de la veine contractée. Ainsi, pour chaque pompe $i^2 = 36$; et en considérant les dix pompes à la fois, la vraie valeur de ce nombre abstrait est dix fois plus grande, c'est-à-dire 360; $e = 6^{pi},25$, et $t = 2'' \frac{5}{6}$. En employant l'équation (317), $2\left(\frac{ADi^2e}{2P} + L.2\right) = L.N$, on trouvera que le nombre N est assez petit pour qu'une unité ajoutée y soit sensible; et il faut alors le déterminer avec précision par l'équation $e = \frac{2P}{ADi^2} \log. \frac{N+1}{2\sqrt{N}}$, qui donne $\frac{ADi^2e}{2P} = \log. \frac{N+1}{2\sqrt{N}}$. On peut, pour abréger, faire $\frac{ADi^2e}{2P} = b$; et on aura $b \log. C = \log. \frac{N+1}{2\sqrt{N}}$, et $C^b = \frac{N+1}{2\sqrt{N}}$; d'où l'on tire $\sqrt{N} = C^b + \sqrt{C^{2b} - 1} = 4,7864$; $N = 22,91$; et $\log. N = 3,12804$; mais $\log. N = \frac{t\sqrt{2gpADi^2}}{P} = 0,07425\sqrt{p}$; d'où il suit que $p = 1775$ livres.

Si, pour avoir égard au frottement des pistons, à l'inertie du balancier et au frottement de son tourillon, on ajoutait 75 livres au poids moteur qu'on vient de trouver, l'excès d'équilibre nécessaire pour produire le mouvement, quand les

pistons des pompes descendent, n'irait encore qu'à 1850 livres, au lieu qu'il semble que l'expérience le donne de 6000 livres; mais c'est en supposant que le ressort de la vapeur dans le cylindre fait équilibre à la pression totale de l'atmosphere sur son piston, lorsque celui-ci s'éleve. C'est ce que nous examinerons tout-à-l'heure, après avoir considéré le mouvement pendant la demi-vibration suivante, c'est-à-dire quand le piston du cylindre descend, et que ceux des pompes remontent.

322. Nous avons vu (319) qu'alors e et t restent les mêmes, et qu'on a $P = 36880$ livres; $A = 0^{pi},394$; $\frac{A}{m} = \frac{A}{n} = 5$; d'où (297) on conclut $i^2 = \frac{A^2}{m^2} = \frac{A^2}{n^2} - 1 = 49$. Si on veut de plus tenir compte du frottement de l'eau dans la pompe (305), on trouvera que, pour une longueur de 61 pieds, la hauteur due au frottement dans ce tuyau est environ triple de celle qui est due à la vîtesse, du moins pour des vîtesses de 2 à 3 pieds par seconde. Ainsi $i^2 = 52$, pour chaque pompe, et pour les dix pompes ensemble $i = 520$: substituant ces valeurs dans les équations précédentes (321), on aura

$$\nu N = 6,5894, \text{ et } L.N = 3,7667 = \frac{f\sqrt{2gpADi^2}}{P};$$

d'où l'on déduit $p = 2778$ livres; et en ajoutant 122 livres pour les autres résistances, le poids moteur serait en nombre rond de 2900 livres.

Pour évaluer celui qui paraît réellement avoir lieu, on a d'un côté le poids des pistons estimé à 6000 livres, déduction faite de la partie soutenue

par les contre-poids, et le poids de l'eau élevée, qui est de 16880 livres; ce qui fait ensemble, du côté des pompes, 22880 livres. De l'autre côté est la pression de l'air sur le piston du cylindre, qu'on estime ordinairement être égale au poids d'une colonne d'eau, qui aurait pour base l'aire du cylindre, et une hauteur de 32 pieds. Cet effort serait de 33675 livres, ou seulement 33300 dans l'état moyen de l'atmosphere. Ainsi il y aurait, suivant ce calcul, un excès d'équilibre de 10420 livres; tandis qu'il ne devrait être que de 2900 livres.

Observations sur les effets de la pression de l'air, et sur l'effort des vapeurs dans les machines à feu.

323. Les différences que nous venons de remarquer dans l'excès d'équilibre, suivant la théorie, et suivant les résultats apparents de l'expérience, soit lorsque les pistons montent, soit quand ils descendent, prouvent que les effets de la machine à feu ne sont pas aussi connus qu'on se l'imagine. Six mille livres de poids moteur, quand les pistons descendent, et plus de dix mille livres, quand ils montent, devraient produire un mouvement plus prompt, et raccourcir de beaucoup le temps des demi-vibrations; la dernière devrait se faire en moins de temps que la première, puisque la force motrice est plus grande : il faut donc qu'on fasse dans l'évaluation des forces quelque supposition gratuite, dont un examen plus réfléchi pourrait démontrer la fausseté. En effet, on

suppose 1° que le ressort de la vapeur qui passe de la chaudiere dans le cylindre, agit contre la face inférieure du piston, avec la même force que celle que l'air exerce par sa pression sur la face supérieure, et que la premiere détruit en entier la seconde; 2° qu'après l'injection de l'eau froide, la vapeur est entièrement condensée; que *le vide* est parfait dans le cylindre, et que l'air exerce toute sa pression sur le piston. Il est vrai que ces effets sont le but qu'on se propose, mais ils n'ont lieu qu'en partie.

324. Il ne faut qu'une chaleur médiocre pour reduire l'eau en vapeurs : une masse de ces vapeurs étant renfermée dans un récipient clos, son ressort augmentera à mesure qu'on y appliquera une plus grande chaleur ; et réciproquement le moindre refroidissement doit le faire diminuer: c'est ce qui arrive à la vapeur, lorsqu'elle passe de la chaudiere dans le cylindre. D'après les observations que nous fîmes, il y a quelques années, aux machines à feu des environs de Condé, nous reconnûmes que la vapeur fait monter l'eau de la chaudiere 6 à 7 pieds plus haut que son niveau, dans un tuyau vertical, qu'on nomme tuyau d'épreuve, dont le bout inférieur trempe dans l'eau bouillante, et le supérieur sort du chapiteau de la chaudiere, après l'avoir traversé. On concluroit d'abord de cette observation, que la force du ressort de la vapeur est à celle du ressort de l'air :: $38\frac{1}{2}$: 32. Mais si l'on fait réflexion que l'eau bouillante à l'air est dilatée de $\frac{1}{17}$, et que celle de

la chaudiere étant plus chaude que l'eau bouillante, doit être encore plus dilatée ; on peut croire que la pression de l'air en soutiendrait une colonne de 33 pieds $\frac{1}{2}$ de hauteur : or, la force de la vapeur soutient un excédent de 6 pieds $\frac{1}{2}$. Ainsi le rapport des pressions est :: 40 : 33 $\frac{1}{2}$.

325. Lorsque le régulateur s'ouvre, la vapeur s'échappant avec une vîtesse prodigieuse, remplit en un instant l'espace compris entre le dessous du piston et le fond du cylindre : c'est un moment de repos, pour changer le mouvement de toute la machine. Dès-lors la vapeur commence à se refroidir, et à se condenser un peu par le contact de l'eau froide qui a été produite par l'injection précédente, et des parois du piston et du bas du cylindre ; elle conserve néanmoins assez de force pour soulever une soupape chargée de l'air extérieur. Mais dès que le piston monte, la soupape reste constamment fermée, ce qui annonce que la pression de l'air atmosphérique est dominante. On en peut juger par la cohibition de la fumée, qui se faisait jour par les joints du chapiteau de la chaudiere : cette fumée se trouve réprimée pendant l'ascension du piston, et ne reparaît que quand le régulateur se ferme ; le refroidissement de la vapeur augmente, tandis que le piston continue de monter ; et à cette cause de la diminution du ressort se joint celle d'un plus grand espace à occuper. Quand le piston est parvenu à sa plus grande élévation, l'espace cylindrique qu'occupent les vapeurs est à-peu-près égal au $\frac{1}{5}$ de la capacité du

chapiteau de la chaudiere, compris au-dessus de l'eau bouillante. Si donc, pendant l'ascension du piston, l'eau de la chaudiere ne formait pas de nouvelles vapeurs, l'expansion de celles que contient le chapiteau, dans un espace plus grand de $\frac{1}{3}$, suffirait pour rendre leur ressort un peu moindre que celui de l'air; mais cette cause, combinée avec le refroidissement de la vapeur, fait que la totalité de la vapeur, y compris même celle que la chaudiere fournit constamment, perd considérablement de son ressort; et qu'une partie de la pression de l'atmosphere s'oppose à l'ascension du piston, en faisant équilibre à l'excès des poids dont est chargée l'autre extrémité du balancier.

Dans la pompe que nous venons d'examiner, l'excès d'équilibre pour faire descendre les pistons, n'est que de 1850 livres; mais l'attirail de ces mêmes pistons pesant 6000 livres, il faut que l'air extérieur agisse sur le piston du cylindre, avec une force de 4150 livres, c'est-à-dire égale au $\frac{1}{7}$ de la pression totale, de sorte que la vapeur perdant environ $\frac{1}{8}$ du ressort qu'elle avoit dans la chaudiere, ne soutient que les $\frac{7}{8}$ de la pression de l'atmosphere: et sa force équivaut alors au poids d'une colonne d'eau, qui aurait 28 pieds de hauteur.

326. Lorsque le régulateur se ferme, et que l'injection d'eau froide a lieu, quoique la vitesse du jet soit très-considérable, et qu'il se divise à l'infini, après avoir frappé le piston, il ne parait pas que l'intérieur du cylindre puisse se refroidir subitement, en condensant entiérement la va-

peur, et lui ôtant tout son ressort. L'expérience apprend que la masse d'eau qui baigne le dessus du piston, et dont la surface touche l'air extérieur, reste toujours très-échauffée; la masse du cylindre, qui se trouve beaucoup plus près de la chaudiere, doit conserver par conséquent assez de chaleur, malgré l'injection, pour empêcher la condensation totale, et ôter à la pression de l'atmosphere une partie de son intensité. Le piston du cylindre se trouve donc en partie soutenu par le ressort d'un fluide, très-rare à la vérité, mais bien différent d'un vide parfait. En effet, nous avons vu que des 33300 livres, qui représentent la pression totale de l'atmosphere sur le piston du cylindre, il ne s'en trouve que 22880 livres, qui soient contre-balancées par le poids et l'attirail des pistons des pompes; il faut encore 2900 livres pour imprimer le mouvement à la machine: il en reste donc 7520, qui contre-balancent le ressort de la vapeur refroidie. Ainsi cette vapeur conservant encore les $\frac{3}{16}$ du ressort qu'elle avait dans la chaudiere, fait perdre à l'air environ les $\frac{2}{9}$ de sa pression, et la réduit au poids d'une colonne d'eau qui aurait 25 pieds de hauteur.

327. Il serait curieux d'observer tous ces effets, par une expérience immédiate, avec l'appareil suivant. ABCD représente le cylindre d'une machine à feu : vers sa partie inférieure, entre le fond et le point de la plus grande descente des pistons, est un tuyau EF, garni d'un godet G, au fond duquel est une soupape, qu'on nomme *reniflante;* Fig. 31.

elle sert à évacuer l'air et les vapeurs qui restent dans le cylindre, quand elle est soulevée à la main, pour mettre la machine en jeu, ou par la force des vapeurs, quand le régulateur s'ouvre. Ayant percé une ouverture au point F, on y adaptera un tuyau recourbé FRH, qui se joindra aux deux tubes de verre HK, IK, appliqués verticalement sur une planche graduée MLON, et joints en K par une boule creuse ; le bout H communiquera à volonté avec l'air extérieur, et avec l'intérieur du cylindre, par le moyen d'un robinet placé en R, tandis que l'autre extrémité I sera toujours ouverte. Ces deux tuyaux auront ensemble environ 80 pouces de développement ; et on y introduira une colonne de mercure de 40 pouces de longueur, qui se tiendra d'abord de niveau de P en Q, quand le robinet sera fermé. Quand au contraire on l'ouvrira, l'air contenu de R en Q se mêlera avec la vapeur ; et, après plusieurs coups de piston, sortira par la soupape reniflante. C'est alors que les différentes positions du mercure indiqueront tous les états de la vapeur. Quand le régulateur sera ouvert, on verra le mercure s'élever dans le tuyau KI, avec une différence de niveau qu excédera d'abord 28 pouces ; mais il s'abaissera pendant l'ascension du piston, et se tiendra peut-être à 24 pouces. Après l'injection de l'eau froide, le mercure s'élevera dans la branche KH, avec une différence de niveau moindre que 28 pouces, variable peut-être pendant la durée de la descente du piston, et qui se réduira peut-être à 22 pouces. La boule

creuse K, qui communiquerait aux deux tuyaux par des orifices moindres que leurs aires, empêcherait les grands balancements du mercure, en lui opposant deux étranglements successifs. Il est donc probable que cet instrument donnerait assez exactement les différents rapports entre le ressort de la vapeur et la pression de l'air, pour toutes les positions du piston ; et l'on ne peut disconvenir que cette connaissance ne soit bien importante pour perfectionner une machine aussi utile, et pour déterminer plus exactement son effet, d'après les données et les calculs que nous venons d'indiquer.

Observations sur le mouvement des fluides élastiques.

328. Nous avons dit qu'au moment que le régulateur d'une machine à feu s'ouvre, la vapeur passe de la chaudiere dans le cylindre, avec une vîtesse prodigieuse : il est aisé de la déterminer, d'après les principes ordinaires, quoiqu'on ait lieu de remarquer qu'on s'est peu occupé jusqu'ici de l'écoulement des fluides rares et élastiques. Il faut observer d'abord que toute la pression du fluide élastique peut être évaluée par le poids d'une colonne de fluide incompressible ; et, en second lieu, que si deux fluides, de densités différentes, s'écoulent par des orifices, en vertu de la pression causée par deux autres fluides incompressibles, en nommant D et d la densité des fluides qui coulent, V et v leurs vîtesses, D′ et d' les densités

des fluides qui les pressent, H et h la hauteur de ces fluides, on aura $V : v :: \sqrt{\frac{D'H}{D}} : \sqrt{\frac{d'h}{d}}$; de sorte que quand le fluide comprimant, et celui qui coule, sont de même densité, les vîtesses sont comme les racines quarrées des hauteurs, quelle que soit d'ailleurs la densité de ces fluides. Ainsi, du mercure et de l'eau, sous la même hauteur de charge, coulent avec des vîtesses égales; mais il n'en est pas de même quand le fluide comprimant a une densité différente du fluide qui coule.

Fig. 32. 329. Soit le tuyau ABC, constamment plein jusqu'en A d'un fluide incompressible, qui ne peut s'écouler que par l'orifice c très-petit en comparaison de IK; en négligeant la contraction, et toute autre résistance, la vîtesse en c sera due à toute la hauteur AB; mais si la partie DEKI était remplie de mercure, le reste du tuyau étant plein d'eau, et que les deux fluides fussent séparés par un plan vertical et mobile DE, on conçoit aisément que le fluide qui doit s'écouler ayant une densité quatorze fois aussi grande que celle du fluide comprimant, la pression de celui-ci ne devrait être comptée que sur le pied du $\frac{1}{14}$ de sa hauteur. Ainsi une colonne d'eau de 32 pieds 8 pouces de hauteur ne procurerait au mercure qu'une vîtesse due à 28 pouces, en négligeant la petite hauteur de mercure IC; et réciproquement, si la partie DEKI était remplie d'eau, et l'autre de mercure, il suffirait de donner 28 pouces de hauteur à la colonne de mercure,

pour imprimer à l'eau qui sortirait par l'orifice *c*, une vîtesse due à 32 pieds 8 pouces de hauteur.

330. Supposons à-présent que la partie F B soit pleine d'eau, sur 32 pieds de hauteur, faisant équilibre à la pression de l'atmosphere; que l'extrémité A F soit exactement fermée et vide d'air, et que le bout I K soit adapté à un récipient parfaitement vide; la partie IDKE étant pleine d'air, et l'orifice *c* bouché, tout sera en équilibre, et le ressort de l'air supportera la colonne de 32 pieds d'eau; mais dès qu'on débouchera l'orifice, l'air en sortira avec une vîtesse due à 32 pieds de hauteur multipliés par le rapport des densités des deux fluides, que nous supposerons égal à 800. Ainsi cette vîtesse sera égale à $\sqrt{2g \times 32 \times 800} =$ 1243 pieds par seconde, tandis que si le fluide qui s'écoule était de l'eau, la vîtesse ne serait due qu'à 32 pieds de hauteur, et se bornerait à 44 pieds : or la colonne d'eau de 32 pieds d'élévation, que nous avons supposé charger l'air, fait la fonction du poids total de l'atmosphere, s'il agissait immédiatement. Ainsi nous pouvons conclure que quand l'air entre dans un récipient parfaitement vide, sa vîtesse initiale est de 1243 pieds par seconde.

331. Nous avons vu que la vapeur formée dans la chaudiere d'une machine à feu a un ressort plus considérable que celui de l'air, et qui équivaut à-peu-près au poids d'une colonne d'eau de 38 pieds de hauteur. Or, dans cet état, si on suppose que la densité de la vapeur ne soit que la quatorze-

millieme de celle de l'eau (1), il s'ensuivra que quand le régulateur s'ouvre, et en supposant le vide parfait dans le cylindre, la vapeur doit s'y introduire avec une vîtesse initiale égale à $\sqrt{2g \times 38 \times 14000}$, ou à 5665 pieds par seconde.

332. En général, on peut comparer le ressort d'un fluide élastique au poids d'une colonne d'un fluide incompressible, tel que l'eau; et si on nomme h la hauteur de cette colonne, d le rapport de la densité de l'eau à celle du fluide élastique et V la vîtesse que doit prendre ce dernier, on aura $V = \sqrt{2ghd}$. On pourra tenir compte de la contraction, si les fluides élastiques en éprouvent de semblables à celle de l'eau.

Si un vase, plein d'un fluide élastique, se vidait par un orifice, dans un espace vide et indéfini, la vîtesse initiale de l'écoulement n'éprouverait point de diminution, et elle demeurerait constante pendant la durée de l'écoulement, parce que le ressort du fluide, représenté par la hauteur variable d'un fluide incompressible, resterait toujours proportionnel à la densité du fluide qui s'écoule.

Mais si le fluide élastique entraît dans un récipient fini, parfaitement vide, au commencement du mouvement la vîtesse initiale serait d'abord due à tout le ressort du fluide; mais elle diminuerait

(1) L'eau réduite en vapeur occupant un volume quatorze mille fois plus grand, il s'ensuit que les molécules qui les touchent dans l'état primitif, sont alors à une distance égale à vingt-quatre fois leur diametre.

ensuite, à mesure que la densité intérieure augmenterait; et le mouvement cesserait quand le fluide intérieur aurait acquis la même densité que l'extérieur. Ce mouvement se rapporte exactement à celui de l'eau qui coule dans un vase qu'elle tend à remplir.

Enfin, si l'air, ou un autre fluide élastique, s'introduit dans un récipient d'une capacité variable, par exemple, dans un corps de pompe dont le piston se meut avec une vîtesse uniforme, la densité intérieure parviendra bientôt à l'uniformité, et se réglera de telle maniere que la différence des deux ressorts puisse introduire assez de fluide pour occuper constamment l'augmentation de la capacité.

333. La physique s'enrichira sans doute de quantité d'expériences curieuses sur le mouvement des fluides; sur-tout dans un temps où l'on vient de découvrir tant d'especes de fluides élastiques, dont il est intéressant de connaître toutes les propriétés. Mais nous bornerons ici nos réflexions à cet égard, parce que l'utilité de ces découvertes intéresse moins l'hydraulique, dont nous nous occupons principalement.

FIN DU PREMIER VOLUME.

TABLE DES MATIERES

CONTENUES

DANS CE PREMIER VOLUME.

PREMIERE PARTIE.

Du mouvement uniforme et varié des eaux courantes.

SECTION PREMIERE.

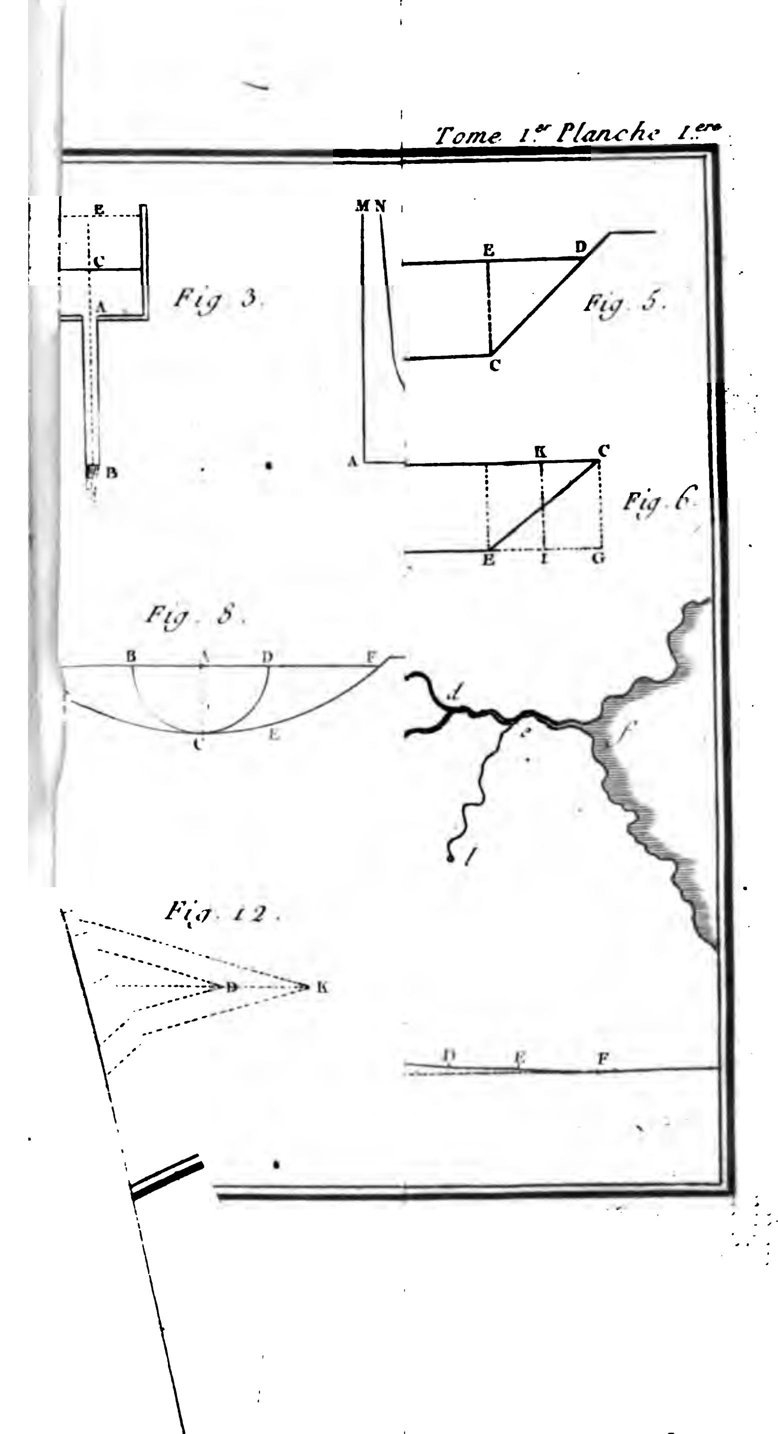
SECTION II.

SECTION III.

SECTION IV.

FIN DE LA TABLE.

N. B. *Ce premier volume a trois planches.*


E
C
A
B
Fig. 3.
M N
E
D
C
Fig. 5.
A
K
C
Fig. 6.
E
I
G
Fig. 8.
B
A
D
F
C
E
d
e
f
l
Fig. 12.
D
K
D
E
F

